

VII. Quantenmechanik geladener Teilchen im elm. Feld

7.1 Minimaler Kopplung und Eichtransformation

Aus der klassischen Mechanik / Elektrodynamik ist bekannt, daß die Kraft auf eine (bewegte) Ladung q lautet (Gauß Einheit)

$$(416) \quad \vec{p} = \vec{F} = q \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right)$$

$\vec{E}$: elektrische Feldstärke

$\vec{B}$: magnetische Feldstärke

Maxwell Gleichungen (Gauß) im Vakuum

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi \rho$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

(417)

inhomogenes MWGL

homogenes MWGL

Die homogenen MWGL können formal durch Einführung elm. Potentiale gelöst werden

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}} \quad (418)$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0 \\ &= \vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$(419) \Rightarrow \boxed{\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \Phi}$$

$\vec{A}$ - Vektorpotential ; Φ - Skalares Potential

Wir wissen aus der Elektrodynamik, daß $\vec{A}$ und Φ nicht eindeutig festgelegt sind sondern eine Eichfreiheit besitzen: Die Physik bleibt unverändert unter folgenden

(420) Eichtransformationen

$$\begin{aligned} \vec{A} &\rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \lambda(\vec{r}, t) \\ \Phi &\rightarrow \Phi' = \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \lambda(\vec{r}, t) \end{aligned}$$

führt zu $\vec{B}' = \vec{B}$ und $\vec{E}' = \vec{E}$

Ein geladenes Punktteilchen der Ladung q erfährt im elm. Feld eine Lorentzkraft, d.h.

$$(421) \quad m \frac{d\vec{v}}{dt} = q \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right)$$

Dieses führt auf die klassische Lagrange-funktion

$$(422) \quad L(\vec{x}, \vec{v}, t) = \frac{m}{2} \vec{v}^2 - q \Phi(\vec{r}, t) + \frac{q}{c} \vec{v} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t)$$

Denn die Euler-Lagrange Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial x_\alpha} = 0 \quad \alpha = 1, 2, 3$$

liefern Gl. (427). Damit findet man den kanonischen Impuls eines Teilchens im elm. Feld

$$(423) \quad p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial v_\alpha} = m v_\alpha + \frac{q}{c} A_\alpha$$

$$\vec{p} = m \vec{v} + \frac{q}{c} \vec{A}$$

Die klassische Hamiltonfunktion einer bewegten Ladung im elm. Feld ist damit

$$H = \vec{p} \cdot \vec{v} - L = \frac{m}{2} \vec{v}^2 + q \Phi(\vec{r}, t)$$

$$(424) \quad = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A}(\vec{r}, t) \right)^2 + q \Phi(\vec{r}, t)$$

Das kann in die QMech übersetzt werden

$$(425) \quad \hat{H} = \frac{1}{2m} \left(\hat{\vec{p}} - \frac{q}{c} \vec{A}(\vec{r}, t) \right) \left(\hat{\vec{p}} - \frac{q}{c} \vec{A}(\vec{r}, t) \right) + q \Phi + V$$

wobei wir ein weiteres Potential $V(\vec{r})$ zufügen haben.

Symmetrisierung da $[\hat{\vec{p}}, \vec{A}(\vec{r}, t)] \neq 0$

$\Rightarrow$ Der Hamiltonoperator enthält explizit die elm. Potentiale und ist nicht eichinvariant ??

$\leftarrow$ 15.06.

Die Eichinvarianz kann gezeigt werden wenn wir gleichzeitig eine unitäre Trafo der Wellenfunktion $\psi(\vec{r}, t)$ vornehmen

$$\psi \rightarrow \psi' \quad \vec{A} \rightarrow \vec{A}' \quad \Phi \rightarrow \Phi'$$

Eichphasentransformation

$$(426) \quad \begin{aligned} \vec{A}' &= \vec{A} + \vec{\nabla} \lambda & \Phi' &= \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \lambda \\ \psi'(\vec{r}, t) &= \psi(\vec{r}, t) \exp \left\{ i \frac{q}{c} \lambda(\vec{r}, t) \right\} \end{aligned}$$

Die Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = \hat{H} \psi(\vec{r}, t)$$

behält bei simultaner Transformation der elm. Potentiale und der Wellenfunktion gemäß der oben definierten Eichphasentransformation ihre Form

Beweis: (427) $\hat{U} = \exp \left\{ i \frac{q}{c} \lambda(\vec{r}, t) \right\}$ unitär

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi' = i\hbar \left(\frac{\partial \hat{U}}{\partial t} \psi + \hat{U} \frac{\partial}{\partial t} \psi \right)$$

$$= i\hbar \left(\frac{iq}{\hbar c} \frac{\partial \lambda}{\partial t} \right) \hat{U} \psi + i\hbar \hat{U} H \hat{U}^{-1} \psi$$

$$= i\hbar \left[\frac{iq}{\hbar c} \frac{\partial \lambda}{\partial t} + \hat{U} H \hat{U}^{-1} \right] \psi$$

was ist $U H U^{-1}$?

$$U H U^{-1} = e^{\frac{i q}{\hbar c} \lambda} H e^{-\frac{i q}{\hbar c} \lambda}$$

In H steckt der Impuls, d.h. $\vec{\nabla}$, der nicht mit $\lambda(\vec{r}, t)$ kommutiert. Mit

$$e^{\frac{i q}{\hbar c} \lambda(\vec{r}, t)} \vec{\nabla} e^{-\frac{i q}{\hbar c} \lambda(\vec{r}, t)} = \left(\vec{\nabla} - \frac{i q}{\hbar c} (\vec{\nabla} \lambda) \right)$$

folgt

$$U H U^{-1} = \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - \frac{q}{c} (\vec{A} + \vec{\nabla} \lambda) \right) \cdot \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - \frac{q}{c} (\vec{A} + \vec{\nabla} \lambda) \right) + q\Phi + V$$

$\underbrace{\vec{A} + \vec{\nabla} \lambda}_{= \vec{A}'} = \vec{A}'$

$\Rightarrow$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi' = \left[\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - \frac{q}{c} \vec{A}' \right) \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - \frac{q}{c} \vec{A}' \right) + q \left(\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \lambda \right) + V \right] \psi'$$

$\underbrace{\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \lambda}_{= \Phi'} = \Phi'$

□

Offensichtlich gilt

$$(428) \quad U \vec{r} U^{-1} = \vec{r} \quad \text{invariant}$$

aber

$$(429) \quad U \vec{p} U^{-1} = \vec{p} - \frac{q}{c} \vec{\nabla} \lambda \quad \text{nicht invariant}$$

Daher ist der kanonische Impuls $\vec{p}$ keine Observable! Jedoch ist der kinetische

Impuls

(430)

$$m \vec{v} \equiv \vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A}$$

eichinvariant und daher eine Observable.

In einer Ü.A. sollen Sie die Vertauschungs-
relationen des kinetischen Impulses
verifizieren

$$(431) \quad [\hat{x}_i, m \hat{v}_j] = i\hbar \delta_{ij}$$
$$[m \hat{v}_i, m \hat{v}_j] = i\hbar \frac{q}{c} \varepsilon_{ijk} B_k$$

Eine vorteilhafte Eichung für die q.m. Behandlung geladener Teilchen im elm. Feld ist die

Coulomb Eichung

$$(432) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

in der gilt

(433)

$$\left[\vec{p}, \vec{A}(\vec{r}, t) \right] = 0$$

Dann ist

$$H = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A}(\vec{r}, t) \right)^2 + q \Phi(\vec{r}, t) + V(\vec{r})$$

7.2 Geladene Teilchen im Magnetfeld

Eine wichtige Anwendung ist die Bewegung eines Elektrons in einem Magnetfeld konstanter Stärke

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B} = \text{konst} \vec{e}_z$$

Hier $\Phi = 0$ und $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ Coulomb
Eichung

Die Wahl der Coulomb-Eichung legt das
Vektorpotential noch nicht vollständig fest
hier:

$$(434) \quad \vec{A} = -\frac{1}{2} (\vec{r} \times \vec{B}) \quad \text{symmetrische Eichung}$$

$$\begin{aligned} \text{check: } \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} = -\frac{1}{2} \vec{\nabla} \times (\vec{r} \times \vec{B}) \\ &= -\frac{1}{2} [(\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{r} - \vec{B} (\vec{\nabla} \cdot \vec{r})] \\ &= -\frac{1}{2} \left[B_\mu \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_\mu} x_\nu}_{=\delta_{\mu\nu}} \vec{e}_\nu - \vec{B} \cdot \vec{3} \right] \\ &= \frac{1}{2} (3\vec{B} - \vec{B}) = \vec{B} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Hamiltonoperator in Ortsdarstellung (ü.A.)

$$(435) \quad \begin{aligned} \hat{H} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{r}) + \frac{q\hbar}{2mc} \frac{1}{i} (\vec{r} \times \vec{B}) \cdot \vec{\nabla} \\ &\quad + \frac{q^2}{8mc^2} (\vec{r} \times \vec{B})^2 \end{aligned}$$

Nun ist

$$\frac{\hbar}{i} (\vec{r} \times \vec{B}) \cdot \vec{\nabla} = -\frac{\hbar}{i} \vec{B} \cdot (\vec{r} \times \vec{\nabla}) = -\vec{B} \cdot \vec{L}$$

-177-

d.h.

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{r}) - \underbrace{\text{sgn}(q) \frac{\mu}{\hbar} \vec{B} \cdot \vec{L}}_{\text{Kopplung des Bahndrehimpulses an das Magnetfeld}} + \frac{q^2}{8mc^2} (\vec{r} \times \vec{B})^2$$

(436)

Kopplung des Bahndrehimpulses an das Magnetfeld

(437)

$$\mu \equiv \frac{|q| \hbar}{2mc}$$

Bohr'sches
Magneton

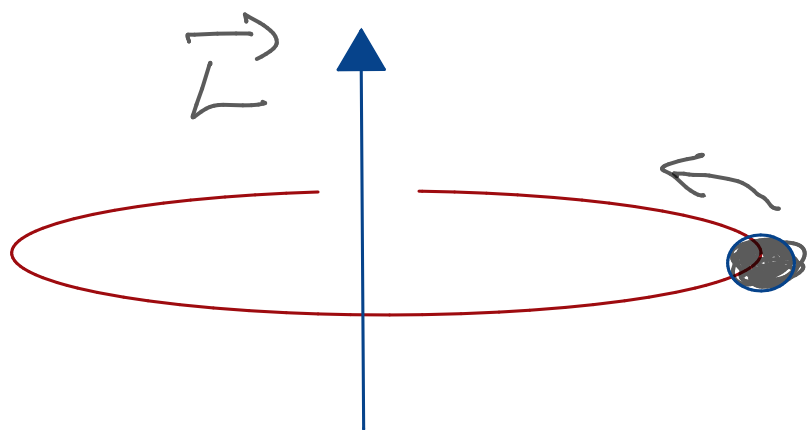
Klassisches Bild: Energie eines magnetischen Dipols mit magnetischem Moment $\vec{M}$ im Magnetfeld

$$H = -\vec{M} \cdot \vec{B}$$

d.h.
(438)

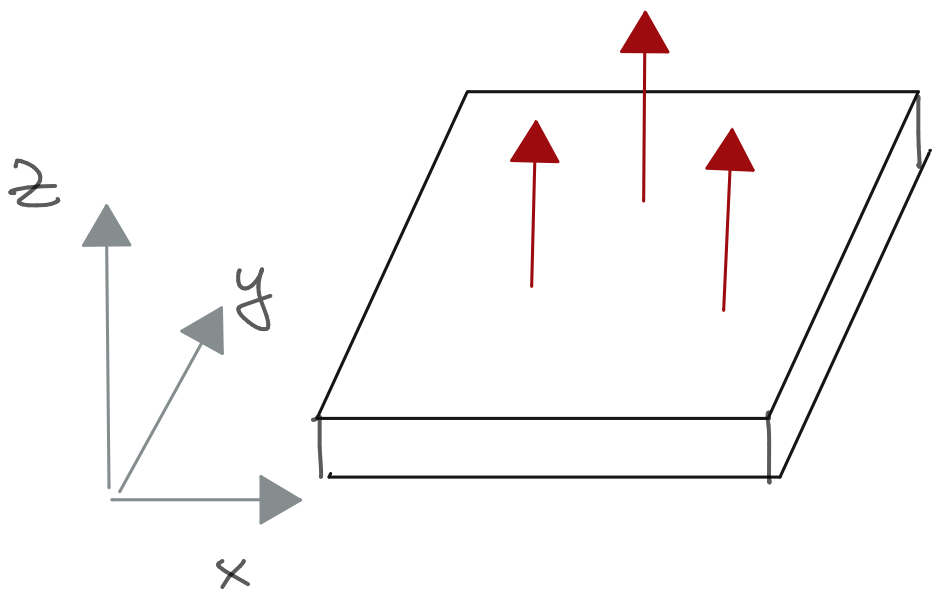
$$\vec{M}_{\text{Bahn}} = \text{sgn}(q) \frac{\mu}{\hbar} \vec{L}$$

Bahn-
magnetisches
Moment



"Ringstrom"
 $\hat{=}$ magnetisches
Moment

Landau Niveaus



2dimensionales
Elektronengas in
einem transversalen
Magnetfeld

Quanten Hall System

$$\vec{B} = (0, 0, B) = B \vec{e}_z \quad V = 0$$

A). Landau Gleichung

$$(439) \quad \vec{\Phi} = 0 \quad \vec{A} = (-yB, 0, 0)$$

Hamiltonoperator

$$(440) \quad \hat{H} = \frac{1}{2m} \left[(\hat{p}_x + \frac{q}{c} y B)^2 + \hat{p}_y^2 \right]$$

suchen Lösungen der stationären SGL

$$\hat{H} \phi_E(x, y) = E \phi_E(x, y)$$

Da
(441)

$$[\hat{p}_x, \hat{H}] = 0$$

haben die Eigenzustände die Form

$$(442) \quad \phi_E = e^{ik_x x} \underline{e^{ik_y y} f_E(y)}$$

Einsetzen in stationäre SQL liefert

$$(443) \left[\frac{\hat{p}_y^2}{2m} + \frac{m}{2} \omega_c^2 (y - y_0)^2 \right] f_E(y) = E f_E(y)$$

$\hat{=}$ harmonischer Oszillator um $y_0 = y_0(k_x)$

woher
(444)

$$\omega_c = \frac{|q|B}{mc}$$

$$y_0 = - \frac{c \hbar k_x}{|q|B}$$

Zyklotronfrequenz

Zentrum des
Zyklotronorbits

Damit sind die Eigenenergien

(445)

$$E_n = \hbar \omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

Landau Niveaus

Eigenfunktionen $f_E(y) \hat{=}$ harmonische
Oszillatorfunktionen
um $y_0 = y_0(k_x)$

Oszillatorlänge

(446)

$$l_m = \sqrt{\frac{\hbar}{m \omega_c}} = \sqrt{\frac{\hbar c}{|q| B}}$$

magnetische
Länge

Die Landanniveaus sind bzgl. k_x entartet, d.h. unendlich oft.

B) Symmetrische Eichung *

$$(447) \quad \vec{A} = \frac{1}{2} (\vec{B} \times \vec{r}) = \frac{B}{2} (-y, x, 0)$$

$$\Rightarrow \hat{H} = \frac{1}{2m} \left[\left(\hat{p}_x + \frac{q}{2c} y B \right)^2 + \left(\hat{p}_y - \frac{q}{2c} x B \right)^2 \right]$$

dimensionslose Größen

$$\bar{x} = x / l_m \quad \bar{y} = y / l_m$$

$$(448) \quad \hat{H} = \frac{\hbar \omega_c}{2} \left[\left(-i \frac{\partial}{\partial \bar{x}} + \frac{\bar{y}}{2} \right)^2 + \left(-i \frac{\partial}{\partial \bar{y}} - \frac{\bar{x}}{2} \right)^2 \right]$$

komplexe Koordinaten zur einfacheren Notation

$$(449) \quad z = \bar{x} + i\bar{y} = r e^{i\theta} \quad z^* = \bar{x} - i\bar{y}$$

$(\bar{x} = \text{Re}[z], \bar{y} = \text{Im}[z])$ sind unabhängige Variable; formal kann man aber auch (z, z^*) als unabhängige Variable betrachten

damit findet man

$$(450) \quad \frac{\partial}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z^*} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{y}} = \frac{1}{i} \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z^*} \right)$$

Jetzt kann man zwei unabhängige
Leiteroperatoren definieren

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}} + i \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \right) \quad \frac{\partial}{\partial z^*} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}} - i \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \right)$$

(451)

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{z}{2} + 2 \frac{\partial}{\partial z^*} \right)$$

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{z^*}{2} - 2 \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

sowie

(452)

$$\hat{b} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{z^*}{2} + 2 \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$\hat{b}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{z}{2} - 2 \frac{\partial}{\partial z^*} \right)$$

Man zeigt leicht

(453) $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = [\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = 1$ $[\hat{a}, \hat{b}^{(\dagger)}] = 0$

dann

$$\hat{a} \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a} = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{2} + 2 \frac{\partial}{\partial z^*} \right) \left(\frac{z^*}{2} - 2 \frac{\partial}{\partial z} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{z^*}{2} - 2 \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{z}{2} + 2 \frac{\partial}{\partial z^*} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left[(\partial_{z^*} z^*) + (\partial_z z) \right] = 1$$

$$\begin{aligned} \hat{a} \hat{b}^\dagger - \hat{b}^\dagger \hat{a} &= \frac{1}{2} \left(\frac{z}{2} + 2 \partial_{z^*} \right) \left(\frac{z}{2} - 2 \partial_{z^*} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\frac{z}{2} - 2 \partial_{z^*} \right) \left(\frac{z}{2} + 2 \partial_{z^*} \right) = 0 \end{aligned}$$

Einsetzen von (451) und (452) in $\hat{H}$ (Gl. 448) zeigt, daß $\hat{H}$ nur von $\hat{a}^\dagger, \hat{a}$ abhängt

$$(454) \quad \boxed{\hat{H} = \hbar \omega_c \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right)}$$

Wiederum Landau Niveaus

Entartung bzgl. $b^\dagger b$!

Drehimpuls in z-Richtung

Aufgrund der Rotationsymmetrie um die z-Achse gilt natürlich

$$(455) \quad [\hat{H}, \hat{L}_z] = 0$$

$$(456) \quad \hat{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \theta} = \hbar \left(z \frac{\partial}{\partial z} - z^* \frac{\partial}{\partial z^*} \right)$$

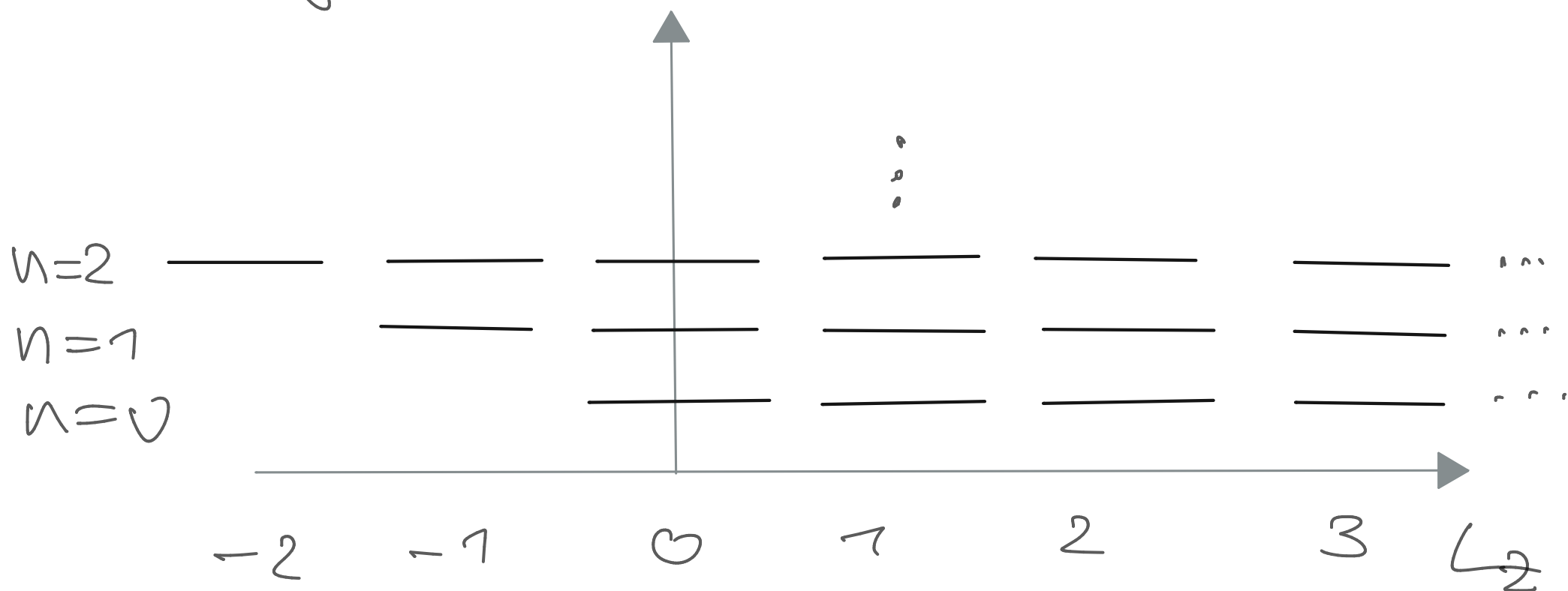
Damit

$$(457) \quad \hat{L}_z = \hbar (b^\dagger b - a^\dagger a)$$

Eigenwerte von $\hat{L}_z = \hbar m$

$$(458) \quad m = -n, -(n-1), -(n-2), \dots$$

Spektrum der Landau niveaus
(englisch: Landau levels "LL")



Wellenfunktionen

$$L_z = \hbar m \quad E = \hbar \omega_c n$$

$$(459) \quad |n, m\rangle = \frac{b^{\dagger n+m} a^{\dagger m} |0\rangle}{\sqrt{(n+m)! m!}}$$

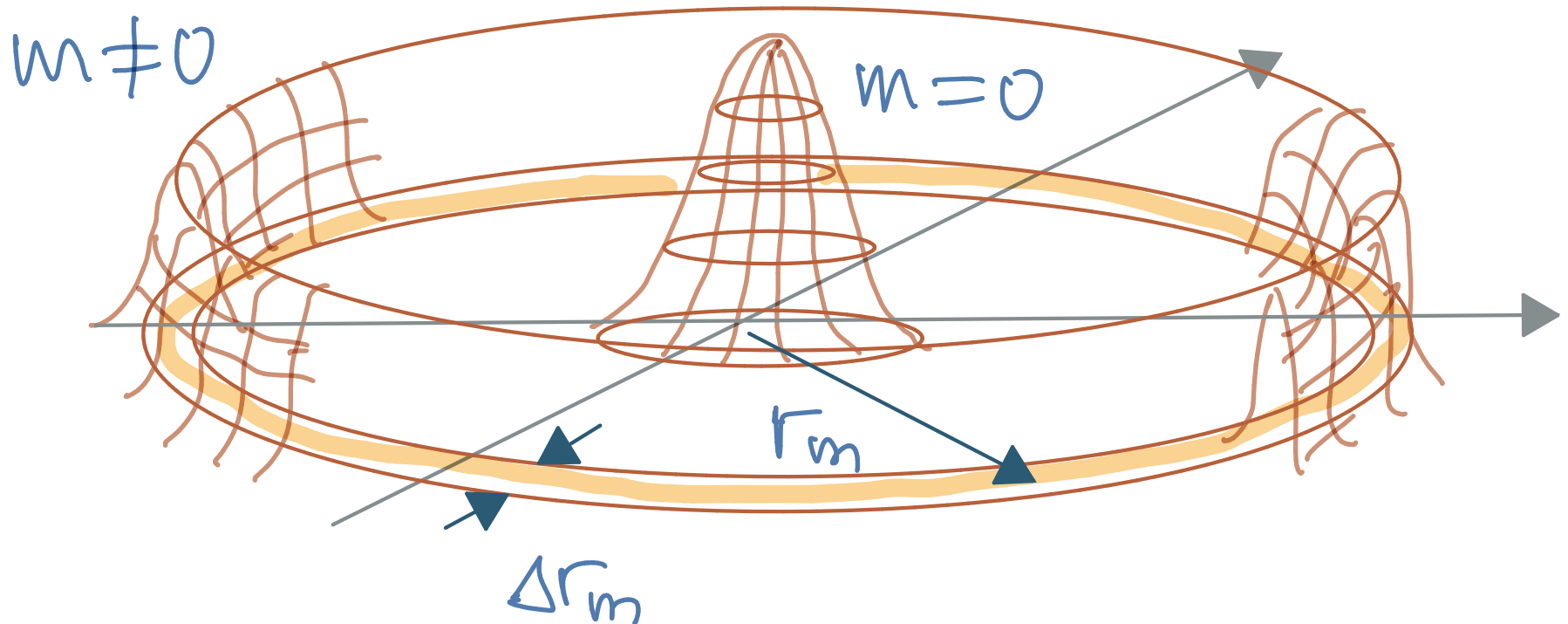
$$(460) \quad \psi_{nm}(z) = \mathcal{N} \left(\frac{z^*}{2} - 2 \frac{\partial}{\partial z} \right)^n \left(\frac{z}{2} - 2 \frac{\partial}{\partial z^*} \right)^{m+n} e^{-|z|^2/4}$$

im niedrigsten Landau Niveau $n=0$

$$\psi_{0m}(z) = \mathcal{N} \left(\frac{z}{2} - 2 \frac{\partial}{\partial z^*} \right)^m e^{-|z|^2/4}$$

(467)

$$\psi_{0m}(z) = \mathcal{N} z^m e^{-|z|^2/4}$$



$$r_m = \ell_m \sqrt{2m}$$

$$\Delta r_m = \frac{\ell_m}{\sqrt{2m}}$$

Fläche

$$A_m = 2\pi r_m \Delta r_m = 2\pi \ell_m^2$$

Entartung in Fläche A

(462)

$$N = \frac{A}{2\pi \ell_m^2} = \frac{AB}{\Phi_0} = \frac{\Phi}{\Phi_0}$$

wobei
(463)

$$\Phi_0 = \frac{2\pi\hbar c}{|q|}$$

Dirac'sches
Flußquant
(für $|q|=e$)

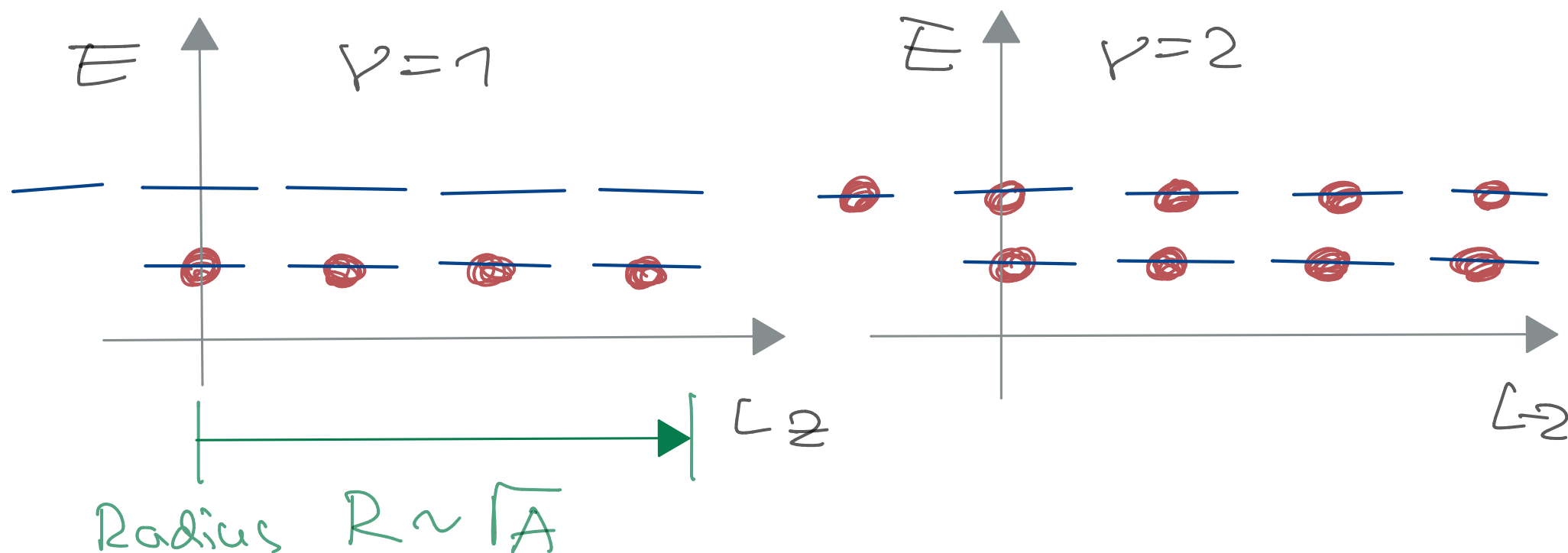
Füllgrad

$$\Phi_0 = 4,737 \times 10^{-7} \text{ Gauss cm}^2$$

$$\nu = \frac{N_e}{N}$$

N_e : Anzahl Elektronen

Wir werden später sehen daß jeder Zustand mit nur einem (spinpolarisierten) Elektron besetzt werden kann

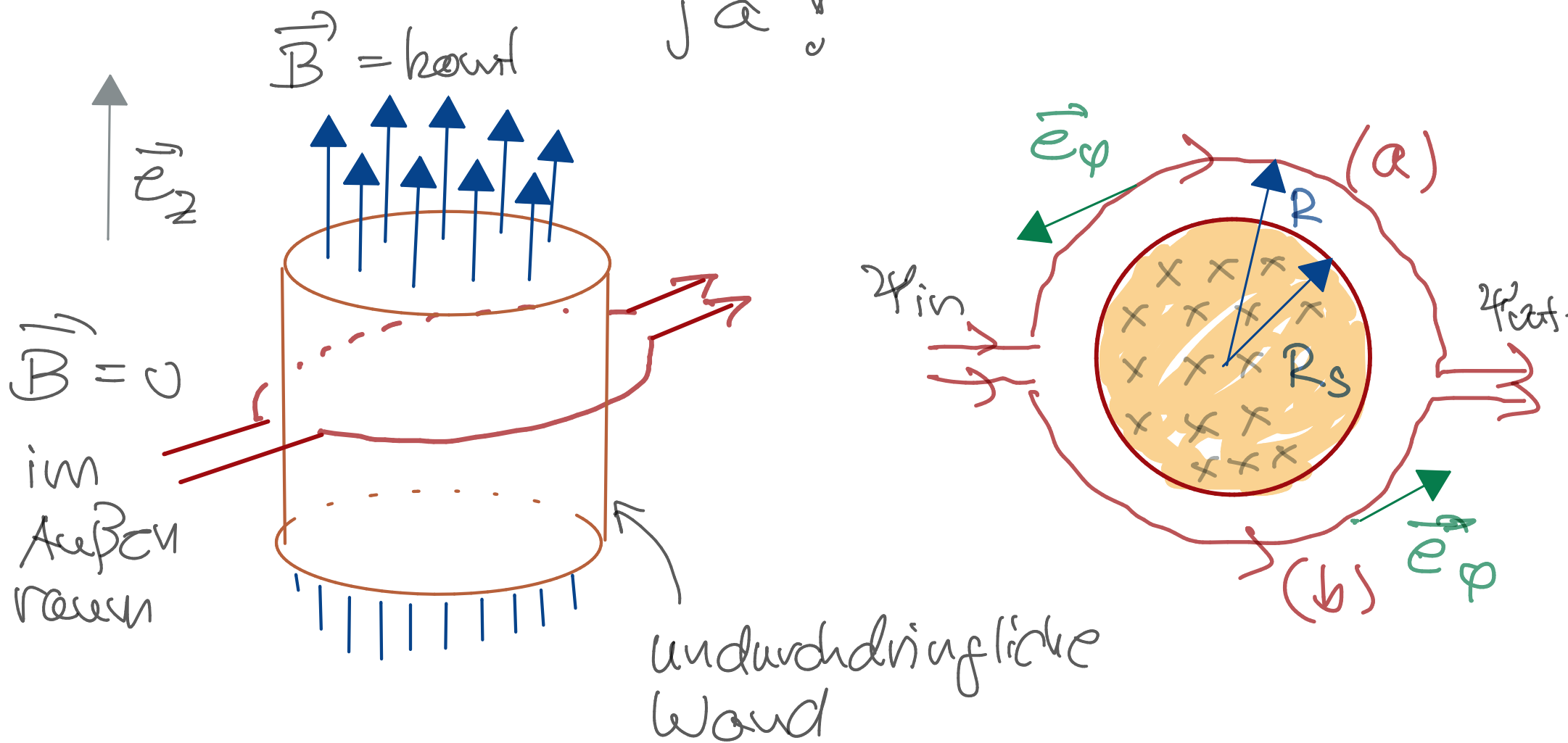


7.3 Aharonov-Bohm Effekt

Das explizite Auftreten des Vektorpotentials in der Schrödingergleichung (425) hat einige interessante Konsequenzen.

Hat das Vorhandensein eines Vektorpotentials
in Raumbereichen in denen $\vec{B} = 0$ eine
Konsequenz?

ja!



aber
(464)

$$\vec{A} = \frac{B R_s^2}{2R} \vec{e}_\varphi = \frac{\Phi_{\text{mag}}}{2\pi R} \vec{e}_\varphi$$

für $R \geq R_s$

denn MWGL

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$$

$$\int_{K_R} d\vec{F} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A} = \int_{K_R} d\vec{F} \cdot \vec{B} = \Phi_{\text{mag}}$$

K_R Kreis mit Radius $R \geq R_s$ in (x,y) Ebene

Stokes

$$d\vec{r} = R d\varphi \vec{e}_\varphi$$

$$\oint d\vec{r} \cdot \vec{A} = \Phi_{\text{mag}}$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi R A_\varphi = 2\pi R A_\varphi = \Phi_{\text{mag}} \quad \square$$

Hamiltonoperator für Elektron $q = -e$
auf Bahnen (a) und (b)

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad (465) \quad H^{(a)} &= \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{e B R_s^2}{c 2 R} \right)^2 \\ &= \hat{P}_\varphi \end{aligned}$$

$$\text{b)} \quad (466) \quad H^{(b)} = \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{e B R_s^2}{c 2 R} \right)^2$$

Damit folgt

$$\psi_{\text{out}}^{(a)} = e^{-\frac{i}{\hbar} H^{(a)} T} \psi_{\text{in}}$$

$$\psi_{\text{out}}^{(b)} = e^{-\frac{i}{\hbar} H^{(b)} T} \psi_{\text{in}}$$

- ψ_{in} sei ebene Welle mit Impuls $\hbar k$.
Wir nähern

$$\hat{P}_\varphi \psi_{\text{in}} \approx \hbar k \psi_{\text{in}}$$

$$H^{(a,b)} = \frac{1}{2m} \left(\hat{p}_\varphi^2 \pm \frac{eB R_s^2}{c} \hat{p}_\varphi \right) + \text{const}$$

$$\psi_{\text{out}}^{(a,b)} = e^{-\frac{i}{\hbar} \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \pm \frac{eB R_s^2}{c} \hbar k + \text{const} \right) T} \psi_{\text{in}}$$

Nun ist

$$T = \frac{\pi R m}{\hbar k}$$

und damit

$$\psi_{\text{out}}^{(a,b)} = e^{-i \frac{\hbar k^2}{2m} T} e^{-i \frac{\text{const} \cdot T}{\hbar}} e^{\mp i \frac{eB R_s^2 \pi}{2\hbar}} \psi_{\text{in}}$$

Damit sammelt das Elektron auf den beiden Wegen eine verschiedene Phase auf. Für die Differenz gilt

(467)

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= \frac{eB\pi R_s^2}{\hbar c} = \frac{e}{\hbar c} \Phi_{\text{mag}} \\ &= \frac{\Phi_{\text{mag}}}{\Phi_0} 2\pi \end{aligned}$$

Aharonov - Bohm Phase

- Die Phase ist unabhängig vom konkreten Weg solange der magnetische Fluß komplett eingeschlossen ist.
- Die Phase ist auch unabhängig von der Anfangsenergie des Elektrons.

$\Rightarrow$ topologische Phase

VIII. Der Spin

8.1 Das Stern Gerlach Experiment

Experiment von Stern und Gerlach (1922)
(Ag Atome) hier: Elektronen

