

III. Der harmonische Oszillator

3.1 Hamiltonoperator und Spektrum

Ein sehr wichtiges Problem der klassischen und Quantenmechanik ist der harmonische Oszillator:

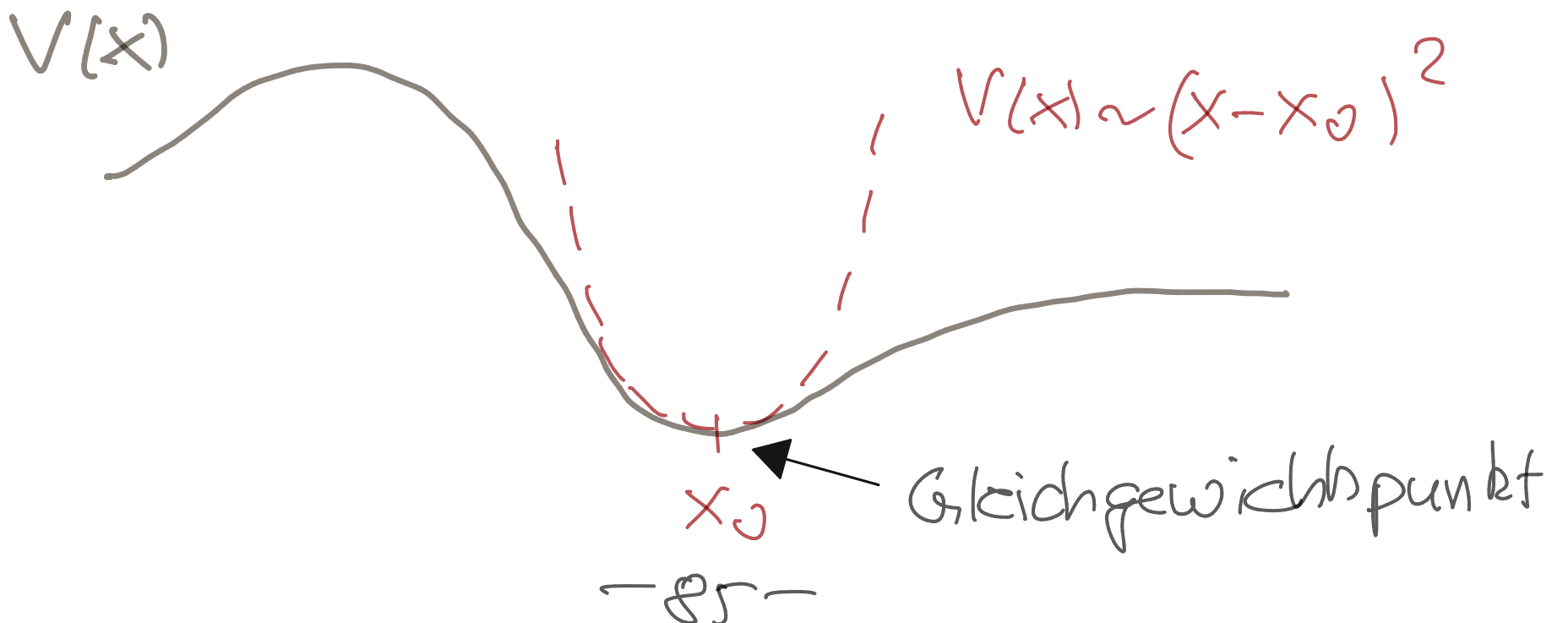
Bspl: klassisches Federpendel



$$V(x) = \frac{k}{2} x^2 = \frac{m}{2} \omega^2 x^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Aber auch die Dynamik in der Nähe eines Gleichgewichtspunktes entspricht der eines harmonischen Oszillators



$$(183) \quad \hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m}{2} \omega^2 \hat{x}^2$$

Einführung skaliertener Variabler

$$(184) \quad \ell_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

Oszillatorlänge

dimensionlose Größen

$$(185) \quad \hat{\xi} \equiv \frac{\hat{x}}{\ell_0} \quad \hat{\pi} \equiv \frac{\ell_0}{\hbar} \hat{p}$$

$$\Rightarrow (186) \quad \hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2} (\hat{\xi}^2 + \hat{\pi}^2)$$

$\hat{H}$ ist symmetrisch in $\hat{\xi}$ und $\hat{\pi}$. Dies wird dazu führen daß die Orts- und Impulsraumwellenfunktionen der Eigenzustände in dimensionslosen Größen gleich sind.

$$(187) \quad [\hat{\xi}, \hat{\pi}] = \left[\frac{\hat{x}}{\ell_0}, \frac{\ell_0}{\hbar} \hat{p} \right] = i$$

Jetzt definieren wir neue, nicht-hermitesche Operatoren

(188)

$$\begin{aligned} \hat{a} &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{\xi} + i\hat{\pi}) \\ \hat{a}^\dagger &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{\xi} - i\hat{\pi}) \end{aligned}$$

bzw. umgekehrt

$$(189) \quad \hat{q} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad \hat{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{i} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger)$$

Mit Hilfe dieser Operatoren lässt sich der Hamiltonoperator (186) schreiben als

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2} (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger)$$

Vertauschungsregeln

$$\begin{aligned} [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] &= \frac{1}{2} [\hat{q} + i\hat{\pi}, \hat{q} - i\hat{\pi}] = \\ &= \frac{1}{2} (-i[\hat{q}, \hat{\pi}] + i[\hat{\pi}, \hat{q}]) = 1 \end{aligned}$$

d.h.

(190)

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$$

Damit erhalten wir

(191)

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right)$$

Nun bestimmen wir Eigenwerte und Eigenzustände von $\hat{H} \Rightarrow$ Eigenzustände von $\hat{a}^\dagger \hat{a}$

$$(192) \quad \hat{a}^\dagger \hat{a} |\lambda\rangle = \lambda |\lambda\rangle$$

(i) $\hat{a}^\dagger \hat{a}$ ist positiv definit da
 $\langle \psi | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \psi \rangle = \| \hat{a} | \psi \rangle \|^2 \geq 0$

$$(193) \quad \Rightarrow \quad \lambda \geq 0$$

(ii) | wenn λ ein EW so ist es auch $\lambda+1$

Bew:

$$(194) \quad \begin{aligned} \hat{a}^\dagger \hat{a} (\hat{a}^\dagger |\lambda\rangle) &= \hat{a}^\dagger (\underbrace{\hat{a} \hat{a}^\dagger}_{\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1} |\lambda\rangle) = \hat{a}^\dagger (\lambda+1) |\lambda\rangle \\ &= (\lambda+1) (\hat{a}^\dagger |\lambda\rangle) = \hat{a}^\dagger \hat{a} + 1 \end{aligned}$$

| und $\hat{a}^\dagger |\lambda\rangle$ ist proportional zum EZ $|\lambda+1\rangle$ vorausgesetzt $\hat{a}^\dagger |\lambda\rangle$ ist nicht der Nullvektor

$$(195) \quad \hat{a}^\dagger |\lambda\rangle \sim |\lambda+1\rangle$$

(iii) | wenn λ ein EW so ist es auch $\lambda-1$

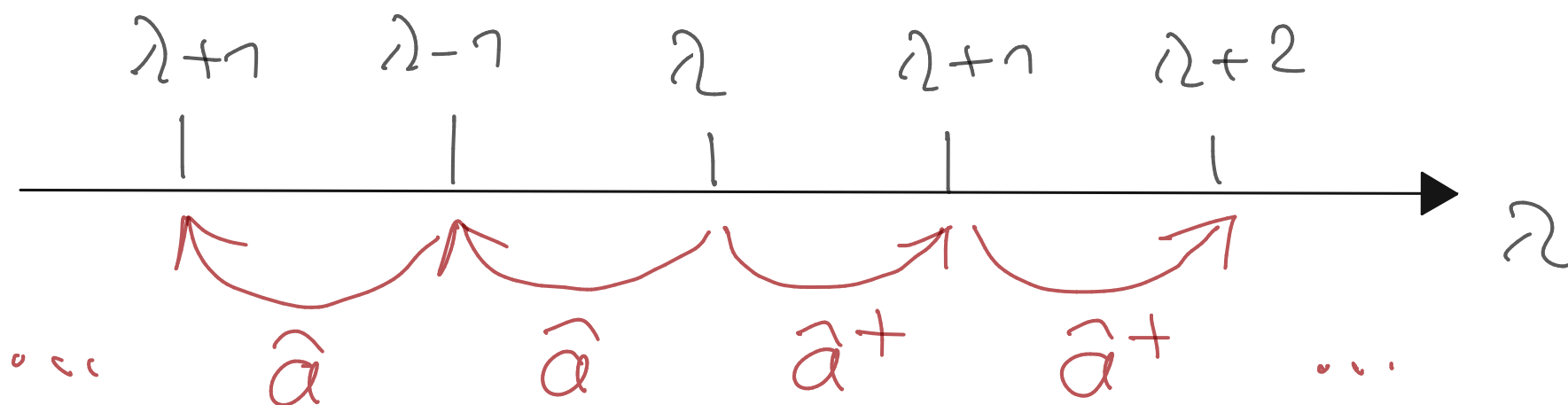
Bew.

$$(196) \quad \begin{aligned} \hat{a}^\dagger \hat{a} (\hat{a} |\lambda\rangle) &= \hat{a} \underbrace{\hat{a}^\dagger \hat{a}}_{\hat{a} \hat{a}^\dagger - 1} |\lambda\rangle = \hat{a} |\lambda\rangle - \hat{a} |\lambda\rangle \\ &= \hat{a} (\lambda-1) |\lambda\rangle = (\lambda-1) \hat{a} |\lambda\rangle \end{aligned}$$

und $\hat{a}|\lambda\rangle$ ist proportional zum EZ $|\lambda-1\rangle$ vorausgesetzt $\hat{a}|\lambda\rangle$ ist nicht der Nullvektor

$\Rightarrow$

$\hat{a}, \hat{a}^+$ sind Leiteroperatoren



(iv) es folgt, daß

(197)

$$\lambda = n \in \{0, 1, 2, 3, \dots\} \quad n \in \mathbb{N}$$

Bew: sei $|\lambda\rangle$ EV und $\lambda > 0$

$$\begin{array}{ll} \hat{a}|\lambda\rangle & \text{EW } \lambda-1 \\ \hat{a}^2|\lambda\rangle & \text{EW } \lambda-2 \end{array}$$

$\vdots$

d.h.

$$\begin{aligned} |\lambda-1\rangle &= C_1 \hat{a}|\lambda\rangle \\ |\lambda-2\rangle &= C_2 \hat{a}^2|\lambda\rangle \end{aligned}$$

$$(198) \quad \|\hat{a}^{n+1}|\lambda\rangle\|^2 = \frac{\langle \lambda-n | \hat{a}^+ \hat{a} | \lambda-n \rangle}{|C_{n+1}|^2}$$

$$= \frac{(\lambda - n)}{|C_{n+1}|^2} \geq 0 \quad \text{da } \hat{a}^\dagger \hat{a} \text{ positiv } \forall n!$$

Das lässt sich nur erreichen wenn
 $\lambda \in \{0, 1, 2, \dots\}$ da dann die Folge
 abbricht (und $\hat{a} | \lambda - \lambda \rangle$ der Nullvektor ist)

$$\Rightarrow \begin{array}{ll} \text{kleinster EW} & \lambda_0 = 0 \\ \text{höhere EW} & \lambda_n = n \end{array}$$

Eigenzustand

$$(199) \quad \begin{array}{ll} \lambda_0 = 0 & |0\rangle \\ \downarrow & \\ \lambda_n = n & |n\rangle = C_n \hat{a}^\dagger |n-1\rangle \end{array}$$

was ist C_n ? Es soll gelten

$$\begin{aligned} 1 = \langle n | n \rangle &= |C_n|^2 \langle n-1 | \underbrace{\hat{a} \hat{a}^\dagger}_{\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1} | n-1 \rangle \\ &= |C_n|^2 \langle n-1 | \hat{a}^\dagger \hat{a} + 1 | n-1 \rangle = |C_n|^2 ((n-1) + 1) \\ &= n |C_n|^2 \end{aligned}$$

$$(200) \Rightarrow \quad \underline{\underline{C_n = \frac{1}{\sqrt{n}}}}$$

-90-

(201) D.h. $|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \hat{a}^n |0\rangle$

Iteration liefert

(202)

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \hat{a}^n |0\rangle$$

Zsg:

(203)

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right)$$

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

$$\hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle$$

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle$$

$$\hat{n} \equiv \hat{a}^\dagger \hat{a}$$

Zähloperator

$$n \in \mathbb{N}$$

Absteigeoperator

Aufsteigeoperator

Grundzustandsenergie des 1D harmonischen Oszillators

(204)

$$E_0 = \frac{1}{2} \hbar\omega$$

3.2 Eigenfunktionen

Zur Bestimmung der Eigenfunktionen könnte man die stationäre SGL im Ortsraum

(205) $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \phi_n(x) + \frac{m}{2} \omega^2 x^2 \phi_n(x) = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \phi_n(x)$

oder im Impulsraum

$$(206) \quad \hbar^2 k^2 \tilde{\phi}_n(k) - \frac{m}{2} \omega^2 \frac{d^2}{dk^2} \tilde{\phi}_n(k) = \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2}\right) \tilde{\phi}_n(k)$$

lösen. Beide haben identische Struktur. Es sind gewöhnliche DGL 2. Ordnung.

Tatsächlich geht es viel einfacher:

Grundzustand $|0\rangle$

es gilt

$$(207) \quad \hat{a} |0\rangle \stackrel{!}{=} 0$$

oder

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{\xi} + i\hat{\pi}) |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\hat{x}}{l_0} + \frac{l_0}{\hbar} i \hat{p} \right) |0\rangle = 0$$

Für die Ortsraumwellenfunktion $\phi_0(x) = \langle x | 0 \rangle$ folgt

$$(208) \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{x}{l_0} + l_0 \frac{d}{dx} \right) \phi_0(x) = 0$$

oder mit $\xi \equiv x/l_0$ $l_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$

$$\left(\xi + \frac{d}{d\xi} \right) \phi_0(\xi) = 0$$

$$\frac{d}{d\xi} \ln |\phi_0(\xi)| = -\xi$$

$$\ln \phi_0(\xi) = -\frac{\xi^2}{2}$$

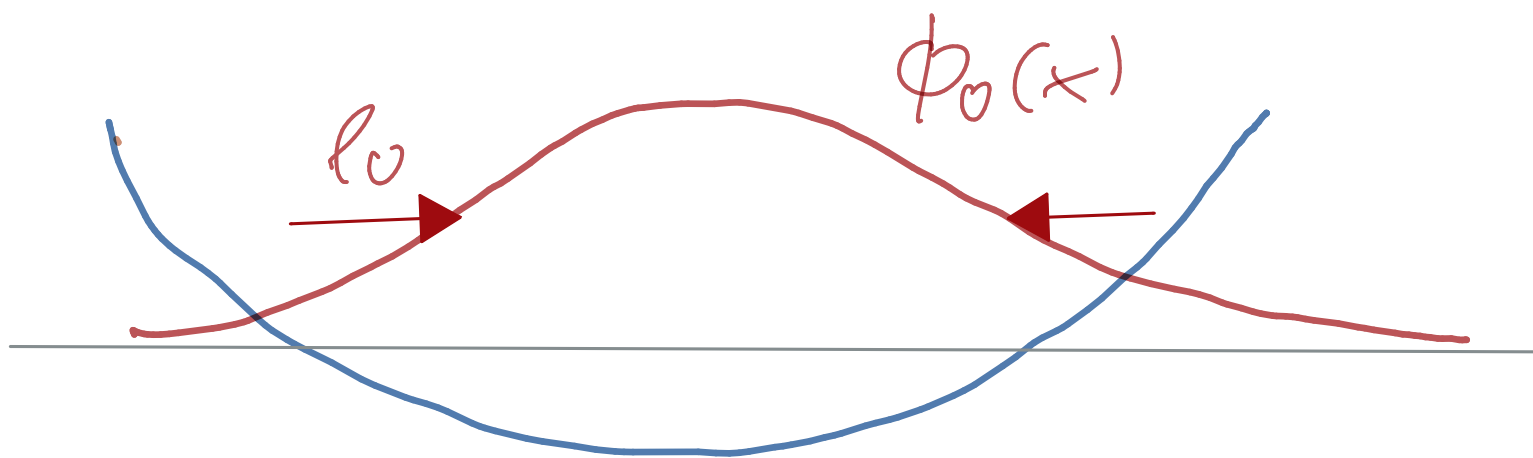
$$\phi_0(\xi) = C e^{-\xi^2/2}$$

(209)

Rückübersetzung in x und Bestimmung von C über Normierung liefert

$$(210) \quad \phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi \ell_0^2}} e^{-\frac{x^2}{2\ell_0^2}}$$

Grundzustand
Gaußfunktion
mit Breite ℓ_0



Oszillatorlänge $\ell_0 \equiv$ Ausdehnung des Grundzustandes

angeregte Zustände $|n\rangle$

Wir hatten gesehen (Gl. 202) daß

$$(211) \quad |n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \hat{a}^{+n} |0\rangle$$

$$\hat{a}^{+} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\hat{x}}{\ell_0} - i \frac{\ell_0}{\hbar} \hat{p} \right)$$

Damit $\phi_n(x) = \langle x | n \rangle$ mit $\xi = \frac{x}{\ell_0}$

$$(212) \quad \phi_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\xi - \frac{d}{d\xi} \right) \right]^n \phi_0(\xi)$$

Die Ableitungen angewandt auf die Gaußfunktion $\phi_0(\xi)$ generieren Polynome multipliziert mit der Gaußfunktion. Man findet

$$(213) \quad \phi_n(\xi) = C \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n(\xi) e^{-\xi^2/2}$$

Hierbei sind

$$(214) \quad H_n(\xi) = e^{\frac{1}{2}\xi^2} \left(\xi - \frac{d}{d\xi} \right)^n e^{-\frac{1}{2}\xi^2}$$

die sogenannten Hermiteischen Polynome

$$(215) \quad H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2}$$

$$H_0(\xi) = 1$$

gerade

$$(216) \quad H_1(\xi) = 2\xi$$

ungerade

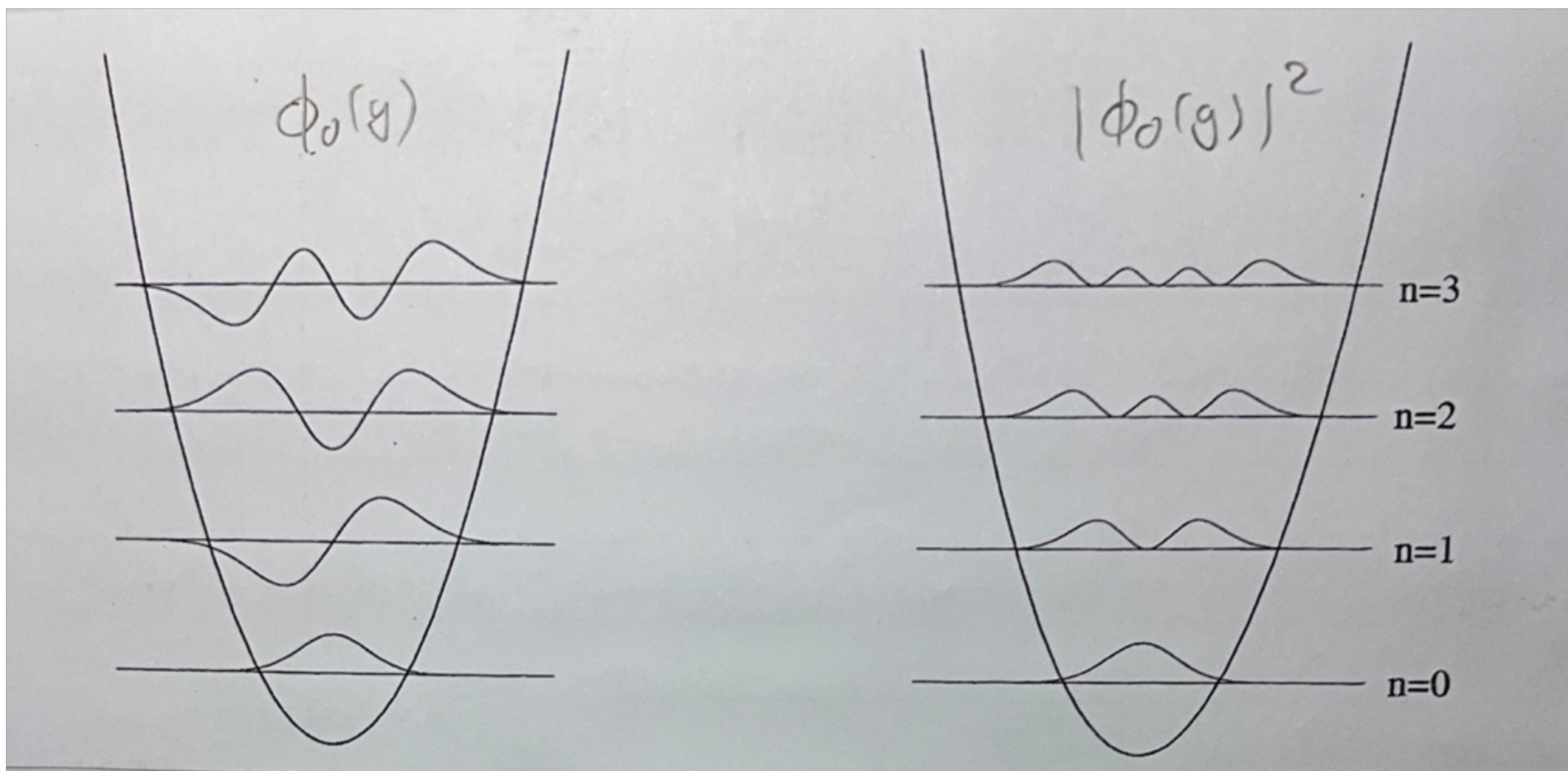
$$H_2(\xi) = 2\xi^2 - 2$$

gerade

$$H_3(\xi) = 8\xi^3 - 12\xi$$

ungerade

⋮



Mit Normierung folgt

$$(277) \quad \phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi} l_0}} H_n\left(\frac{x}{l_0}\right) e^{-\frac{x^2}{2l_0^2}}$$

Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators

3.3 kohärente Zustände

Wir werden jetzt eine Klasse von Zuständen kennenlernen die keine EZ von $\hat{H}$ sind, aber eine Brücke zwischen klassischer und Quantenmechanik erlauben

Def:
(278)

$$|\alpha\rangle \equiv e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

mit $\alpha \in \mathbb{C}$

Kohärente Zustände

- die $|\alpha\rangle$ sind normiert, denn

$$\begin{aligned} \langle \alpha | \alpha \rangle &= e^{-|\alpha|^2} \sum_{n,m} \frac{\alpha^* n \alpha^m}{\sqrt{n! m!}} \underbrace{\langle n | m \rangle}_{=\delta_{nm}} \\ &= e^{-|\alpha|^2} \sum_n \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = e^{-|\alpha|^2} e^{|\alpha|^2} = 1 \quad \square \end{aligned}$$

- Die Zustände $|\alpha\rangle$ sind Rechtbeigezustände von $\hat{a}$

$$\begin{aligned} \hat{a} |\alpha\rangle &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \underbrace{\hat{a} |n\rangle}_{=\sqrt{n} |n-1\rangle} \quad \begin{matrix} ! \\ n \neq 0 \end{matrix} \\ &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha \alpha^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!}} |n-1\rangle \quad m \equiv n-1 \\ &= \alpha e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} |m\rangle \\ &= |\alpha\rangle \end{aligned}$$

d.h.

(279)

$$\hat{a} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle$$

Dass ein solcher Zustand überhaupt existiert ist nicht trivial da $\hat{a}$ nicht hermitesch $\hat{a}^\dagger \neq \hat{a}$

Bem: $\nexists$ Rechteeigenzustand von $\hat{a}^\dagger$!

Eigenschaften kohärenter Zustände

(i) aus $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$

(220) folgt $\langle\alpha|\hat{a}^\dagger = \alpha^*\langle\alpha|$

(ii) $\langle\alpha|\underbrace{\hat{a}^\dagger\hat{a}}_{=\hat{n}}|\alpha\rangle = \alpha^*\langle\alpha|\alpha\rangle\alpha = |\alpha|^2$

(221) $\langle\alpha|\hat{n}|\alpha\rangle = |\alpha|^2$

(iii) $\langle\alpha|\hat{n}^2|\alpha\rangle = \langle\alpha|\hat{a}^\dagger\underbrace{\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}}_{=\hat{a}^\dagger\hat{a}+1}|\alpha\rangle$

(222) $= \langle\alpha|\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{a}|\alpha\rangle = |\alpha|^4 + |\alpha|^2$
 $= \langle\hat{n}\rangle^2 + \langle\hat{n}\rangle$

(223) d.h. $\langle\Delta\hat{n}^2\rangle = \langle\hat{n}^2\rangle - \langle\hat{n}\rangle^2 = \langle\hat{n}\rangle$

Kohärente Zustände haben Poissonsche Fluktuationen in der Anregungszahl

(iv) Erwartungswerte von $\hat{x}$ und $\hat{p}$
in einem kohärenten Zustand

$$\langle \hat{x} \rangle = l_0 \langle \hat{q} \rangle = \frac{l_0}{\sqrt{2}} \langle \hat{a} + \hat{a}^\dagger \rangle$$

$$\langle \hat{p} \rangle = \frac{\hbar}{l_0} \langle \hat{\pi} \rangle = \frac{\hbar}{\sqrt{2} l_0 i} \langle \hat{a} - \hat{a}^\dagger \rangle$$

(224)

$$\langle \hat{x} \rangle = l_0 \sqrt{2} \operatorname{Re}[\alpha]$$

$$\langle \hat{p} \rangle = \frac{\hbar}{l_0} \sqrt{2} \operatorname{Im}[\alpha]$$

(v) Schwankungsquadrate von $\hat{x}$ und $\hat{p}$

$$\langle \Delta \hat{x}^2 \rangle = l_0^2 \langle \Delta \hat{q}^2 \rangle = \dots = \frac{1}{2} l_0^2$$

$$\langle \Delta \hat{p}^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{l_0^2} \langle \Delta \hat{\pi}^2 \rangle = \dots = \frac{1}{2} \frac{\hbar^2}{l_0^2}$$

$$\Rightarrow \langle \Delta \hat{q}^2 \rangle \langle \Delta \hat{\pi}^2 \rangle = \frac{1}{4}$$

(225)

$$\langle \Delta \hat{x}^2 \rangle \langle \Delta \hat{p}^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{2}$$

Zustände minimaler Unschärfe

(vi) Zeitentwicklung kohärenter Zustände

$|\alpha\rangle$ sind keine EZ von $\hat{H}$!

Sei $|\psi(t=0)\rangle = |\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \underline{|\underline{n}\rangle}$

Dies ist Entwicklung nach EZ! EZ von $\hat{H}$

(226) Da $|n\rangle = e^{-i\omega(n+\frac{1}{2})t} |n\rangle$

folgt

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-i\omega(n+\frac{1}{2})t} |n\rangle$$

$$= e^{-i\frac{\omega}{2}t} e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_n \frac{(\alpha e^{-i\omega t})^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

In der Zeitentwicklung bleibt ein kohärenter Zustand ein kohärenter Zustand mit zeitabhängiger komplexer Amplitude

(227)

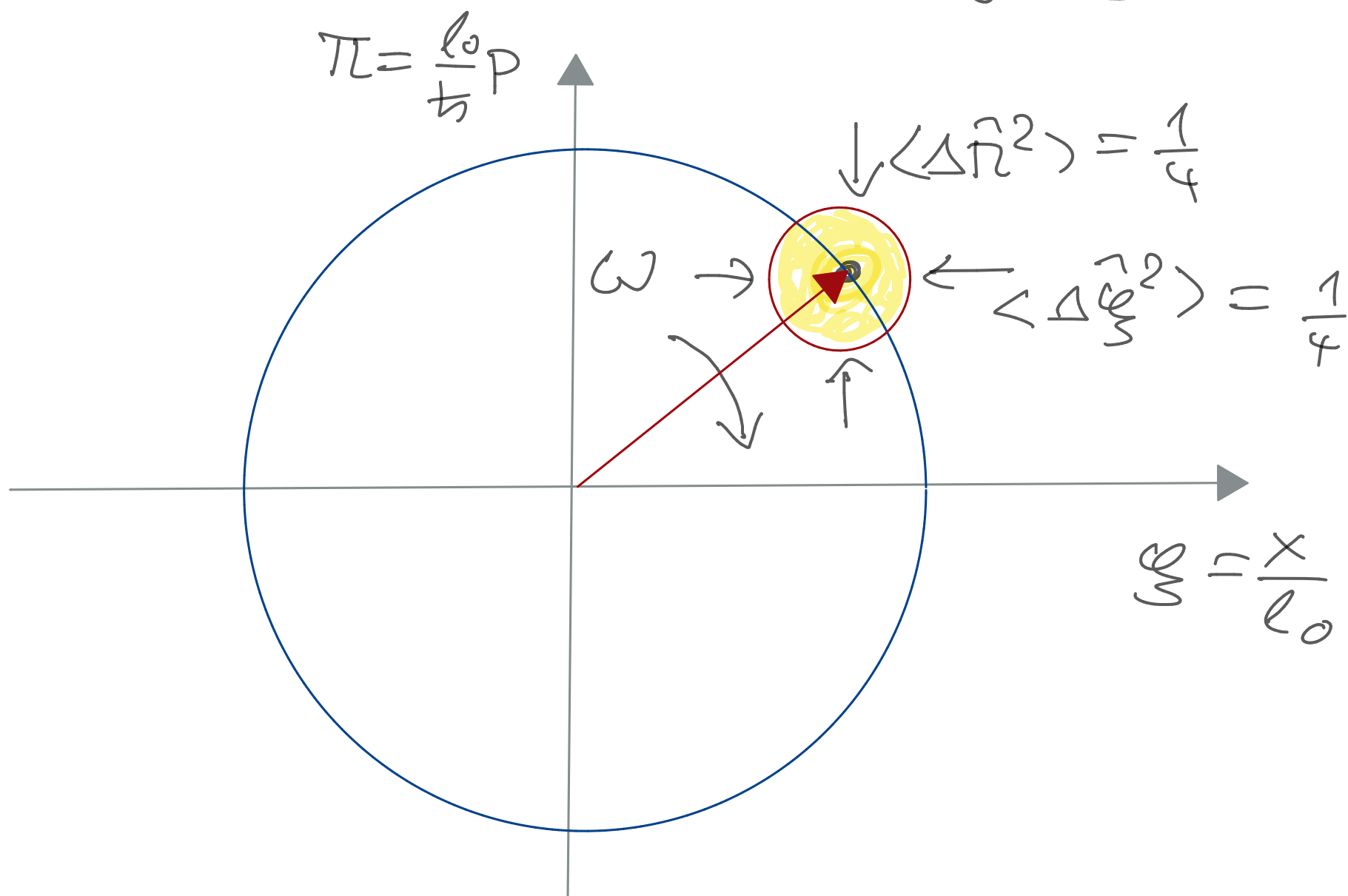
$$\alpha(t) = \alpha e^{-i\omega t}$$

(228) $|\psi(t)\rangle = e^{-i\frac{\omega}{2}t} |\alpha(t)\rangle \quad |\psi(0)\rangle = |\alpha\rangle$

D.h. für Erwartungswerte und Schwankungsquadrate von $\hat{x}$ und $\hat{p}$ folgt

$$(229) \quad \left. \begin{aligned} \langle \hat{x}(t) \rangle &= \ell_0 \sqrt{2} \operatorname{Re}[\alpha] \cos(\omega t) \\ \langle \hat{p}(t) \rangle &= \frac{\hbar}{\ell_0} \sqrt{2} \operatorname{Im}[\alpha] \sin(\omega t) \end{aligned} \right\} \text{klassisch}$$

$$(230) \quad \begin{aligned} \langle \Delta \hat{x}^2(t) \rangle &= \langle \Delta \hat{x}^2(0) \rangle = \ell_0^2 \frac{1}{2} \\ \langle \Delta \hat{p}^2(t) \rangle &= \langle \Delta \hat{p}^2(0) \rangle = \frac{\hbar^2}{\ell_0^2} \frac{1}{2} \end{aligned}$$



Dies entspricht der Phasenraumtrajektorie eines klassischen harmonischen Oszillators

(vii) kohärente Zustände sind nicht orthogonal
(Ü.A.)

$$(231) \quad \langle \alpha | \beta \rangle = e^{\alpha^* \beta - \frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2)}$$

(viii) kohärente Zustände sind übervollständig
(Ü.A.)

$$(232) \int d^2\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha| = \int d\operatorname{Re}(\alpha) \int d\operatorname{Im}(\alpha) |\alpha\rangle\langle\alpha| = \pi$$

(ix) kohärenter Verschiebeoperator (Ü.A.)

$$(233) \quad |\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha) |0\rangle = e^{\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}} |0\rangle$$

$$(234) \quad \hat{D}(\alpha)^{-1} = \hat{D}(\alpha)^\dagger \quad \text{unitär}$$

offensichtlich gilt

$$(235) \quad \hat{D}(\alpha)^\dagger = e^{\alpha^* \hat{a} - \alpha \hat{a}^\dagger} = \hat{D}(-\alpha)$$

Baker-Hausdorff Theorem (siehe Ü.A.)

es sei $[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$ aber

$$[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = [\hat{B}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0$$

dann gilt

$$(235) \quad e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} = e^{\hat{A} + \hat{B} + \frac{1}{2} [\hat{A}, \hat{B}]} = e^{\hat{A} + \hat{B}} e^{\frac{1}{2} [\hat{A}, \hat{B}]}$$

Damit gilt für den kohärenten Verschiebeoperator

$$(236) \quad \hat{D}(\alpha) = e^{-\alpha^* \hat{a}} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} e^{+\frac{1}{2}|\alpha|^2} \\ = e^{\alpha \hat{a}^\dagger} e^{-\alpha^* \hat{a}} e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}$$

3.4 Sommerfeldsche Polynom- methode

Wir hatten die Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators mittels Leiteroperatoren berechnet. Gibt es eine allgemeinere Methode, die sich ggf. auf andere Potentiale anwenden lässt?

stationäre SGL

$$(237) \quad \frac{d^2}{dx^2} \phi_E(x) + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E - \overset{V(x)}{\frac{1}{2} m \omega^2 x^2} \right) \phi_E(x) = 0$$

skalierte Größen

$$(238) \quad y \equiv \frac{x}{\ell_0} \quad \varepsilon = \frac{2E}{\hbar \omega} \quad \ell_0 = \sqrt{\frac{\hbar m \omega}{\hbar}}$$

$$(239) \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2}{dy^2} \phi_E(y) + (\varepsilon - y^2) \phi_E(y) = 0$$

(i) jetzt schauen wir uns zunächst das asymptotische Verhalten an.

$$|y| \rightarrow \infty$$

$$\phi''(y) - y^2 \phi(y) = 0 \Rightarrow \phi(y) \sim e^{\pm y^2/2}$$

damit können wir einen Ansatz machen

$$(240) \quad \underline{\underline{\phi(y) = F(y) e^{-y^2/2}}}$$

mit

$$(241) \quad \underline{\underline{F(y) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n y^n}}$$

Einsetzen in SGL (239) liefert:

$$\begin{aligned} \phi''(y) &= F''(y) e^{-y^2/2} + 2F'(y)(-y) e^{-y^2/2} \\ &\quad + y^2 F(y) e^{-y^2/2} - F(y) e^{-y^2/2} \end{aligned}$$

d.h.

$$\begin{aligned} \phi''(y) + (\varepsilon - y^2) \phi(y) &= \cancel{F'' e^{-y^2/2}} + \cancel{2F'(-y) e^{-y^2/2}} \\ &\quad + \cancel{y^2 F(y) e^{-y^2/2}} - \cancel{F(y) e^{-y^2/2}} + (\varepsilon - y^2) F(y) \cancel{e^{-y^2/2}} \\ (242) \quad &= 0 \end{aligned}$$

dies liefert

$$(243) \quad F''(y) - 2y F'(y) + (\varepsilon - 1) F(y) = 0$$

Mit dem Reihenansatz (241) folgt

$$(244) \quad \sum_n n(n-1) C_n y^{n-2} - 2 \sum_n n C_n y^n + (\varepsilon - 1) \sum_n C_n y^n = 0$$

Vergleich der Potenzen von y liefert

$$(n+2)(n+1) C_{n+2} - 2n C_n + (\varepsilon - 1) C_n = 0$$

$$(245) \quad \Rightarrow \quad C_{n+2} = \frac{(2n+1-\varepsilon) C_n}{(n+2)(n+1)}$$

Rekursion

- gerade Koeffizienten $C_0 \rightarrow C_2 \rightarrow C_4 \dots$
→ symmetrische Lösungen
- ungerade Koeffizienten $C_1 \rightarrow C_3 \rightarrow C_5 \dots$
→ antisymmetrische Lösungen

Symmetrische Lösungen

$$C_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_3 = C_5 = C_7 = \dots = 0$$

$$(246) \quad C_2 = \frac{1-\varepsilon}{2} C_0 \quad C_{n+2} = \frac{2n+1-\varepsilon}{(n+2)(n+1)} C_n$$

Damit eine normierbare Lösung entsteht darf $F(y)$ nicht beliebig große Potenzen von y aufweisen

$\Rightarrow$ Rekursion muß abbrechen!

d.h. $\exists m$ mit $\varepsilon_m \stackrel{!}{=} 2m+1$ (m gerade)

dann gilt $C_{m+2} = C_{m+4} = \dots \equiv 0$

$$(247) \quad E_m = \frac{\hbar \omega}{2} \varepsilon_m = \hbar \omega \left(m + \frac{1}{2}\right) \quad m \text{ gerade}$$

ausgesammelte Lösungen

$$C_0 = 0 \Rightarrow C_2 = C_4 = C_6 = \dots = 0$$

$$(248) \quad C_3 = \frac{3-\varepsilon}{6} C_1 \quad C_{n+2} = \frac{(2n+1-\varepsilon)}{(n+2)(n+1)} C_n$$

Abbruchbeding. wieder $\varepsilon_m = 2m+1$
aber m ungerade

$$(249) \quad E_m = \frac{\hbar \omega}{2} \varepsilon_m = \hbar \omega \left(m + \frac{1}{2}\right) \quad m \text{ ungerade}$$

Wellenfunktionen

$$(250) \quad \phi_m(x) = \text{Polynom}^{(m)}\left(\frac{x}{\ell_0}\right) e^{-x^2/2\ell_0^2} \quad \text{hier } H_m\left(\frac{x}{\ell_0}\right)$$