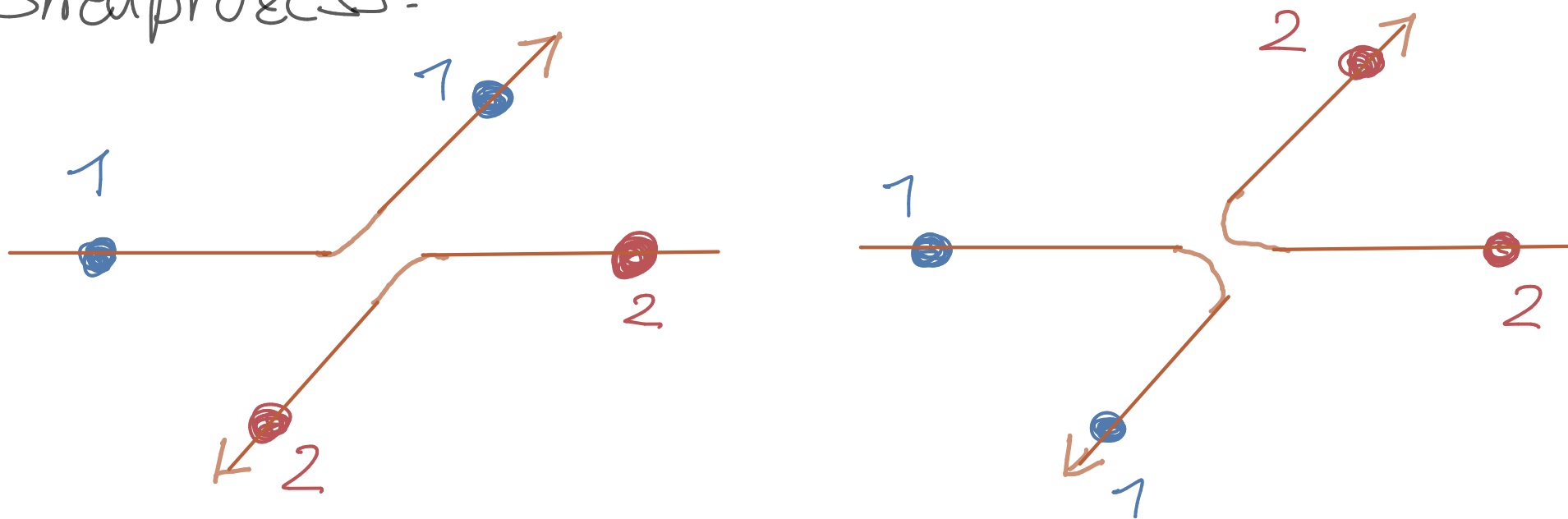


XII. Quantenmechanik von Systemen identischer Teilchen

12.1 Ununterscheidbarkeit identischer Teilchen

In der klassischen Mechanik können wir Teilchen mit identischen inneren Eigenschaften (Masse, Ladung, Farbe, ...) stets unterscheiden, selbst bei einem Streuprozess:



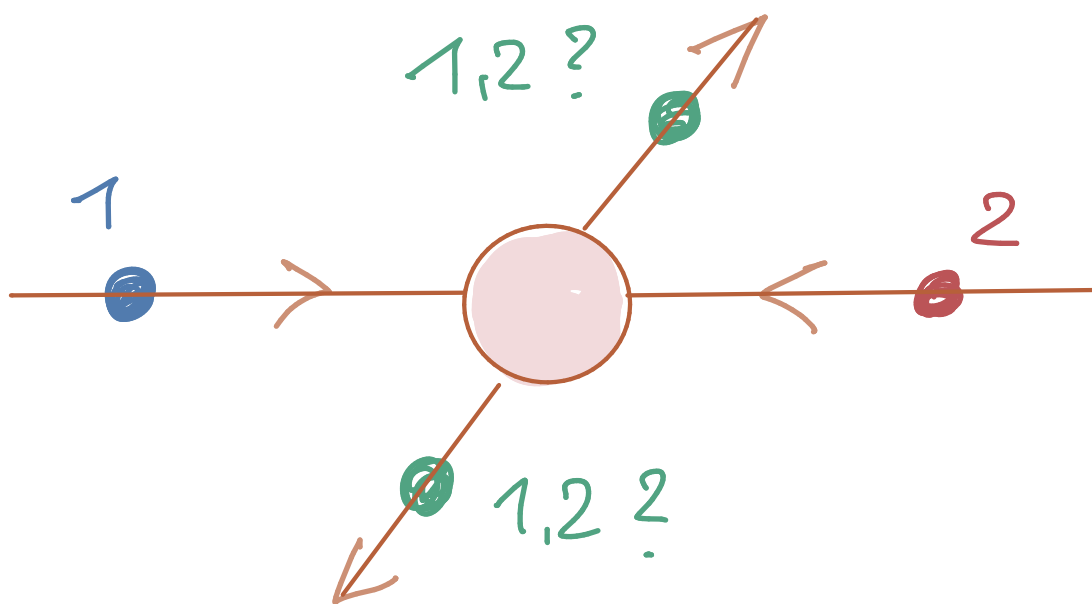
klassisch unterscheidbare Prozesse, da
Trajektorien verfolgbar

quantenmechanische
Streuung

wegen Unschärfe

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Teilchen nach Streuung
nicht mehr zuordnbar



Def: Transpositionoperator $\hat{P}_{ij}$, $i < j$

linearer Operator in

$$\mathcal{H}_n = \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \otimes \dots \otimes \mathcal{H} = \otimes^n \mathcal{H}$$

Sei $|\psi\rangle = |\phi_1\rangle |\phi_2\rangle \dots |\phi_n\rangle$

$$(648) \quad \hat{P}_{ij} |\phi_1\rangle \dots |\phi_i\rangle \dots |\phi_j\rangle \dots |\phi_n\rangle \equiv \\ \equiv |\phi_1\rangle \dots |\phi_j\rangle \dots |\phi_i\rangle \dots |\phi_n\rangle$$

Eigenschaften:

$$(649) \quad \hat{P}_{ij} = \hat{P}_{ij}^\dagger \quad \hat{P}_{ij}^2 = \mathbb{1}$$

Eigenwerte: $\lambda = \pm 1$

Schwaches Symmetriepostulat

Alle Observable eines Systems identischer Teilchen sind selbstadjungierte Operatoren $\hat{A}$ die symmetrisch unter Transposition von Teilchen sind

$$(650) \quad [\hat{A}, \hat{P}_{ij}] = 0 \quad \hat{A} = \hat{P}_{ij} \hat{A} \hat{P}_{ij} \quad \forall i, j$$

$\Rightarrow$ Einschränkung im Raum der Observablen

$$(651) \quad \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle = \langle \hat{P}_{ij} \psi | \hat{A} | \hat{P}_{ij} \psi \rangle$$

Bspl:

- Schwerpunkt $\vec{R} = \frac{1}{2} (\vec{r}_1 + \vec{r}_2)$ ist Observable ✓
 - Relativkoordinaten $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ keine Observable
 - aber $|\vec{r}| = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ ist Observable ✓
 - 2-Teilchen Hamiltonoperator ist Observable ✓
- $$H = \frac{\vec{p}_1^2}{2m} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m} + V(\vec{r}_1) + V(\vec{r}_2) + U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$$

12.2 Der Hilbertraum identischer

Teilchen: Bosonen und Fermionen

Die Menge aller paarweisen Transpositionen $\{\hat{P}_{ij}\}$ in einem N -Teilchensystem bildet bzgl. der Hintereinanderausführung eine Gruppe:

die Permutationsgruppe S_N

Sei "1, 2, 3, ..., N" die natürliche Reihenfolge. Dann versteht man unter dem Signum einer Permutation $\tau \in S_N$, abgekürzt als $\text{sgn}(\tau)$ die Zahl $(-1)^m$ wobei m die Anzahl der Transpositionen benachbarter Elemente bezeichnet, die nötig sind um τ zu erzeugen.

Der Hilbertraum $\mathcal{H}_N = \underbrace{\mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}}_N$

zerfällt unter der Permutationsgruppe in invariante Unterräume

$$(652) \quad \mathcal{H}_N = \mathcal{H}_s \otimes \mathcal{H}_{as} \otimes \dots$$

Dabei ist

- Raum der total symmetrischen Zustände

$$(653) \quad \mathcal{H}_s = \{ |\varphi\rangle \in \mathcal{H}_N \mid \hat{P}_{ij} |\varphi\rangle = |\varphi\rangle \quad \forall i < j \}$$

- Raum der total antisymmetrischen Zustände

$$(654) \quad \mathcal{H}_{as} = \{ |\varphi\rangle \in \mathcal{H}_N \mid \hat{P}_{ij} |\varphi\rangle = -|\varphi\rangle \quad \forall i < j \}$$

Bem: • Für $N=2$ gibt es nur $\mathcal{H}_s$ und $\mathcal{H}_{as}$

- Für $N \geq 3$ gibt es Unterräume mit gemischten Symmetrieeigenschaften

Die nach dem schwachen Symmetriepostulat erlaubten Observablen bilden $\mathcal{H}_s$ und $\mathcal{H}_a$ jeweils auf sich ab.

starkes Symmetriepostulat

Die erlaubten Zustände (Dichteoperatoren) von Systemen identischer Teilchen sind entweder total symmetrisch, d.h. Elemente aus $\mathcal{H}_s$, oder total antisymmetrisch, d.h. Elemente aus $\mathcal{H}_a$.

Folgerung: Superauswahlregel

Die Unterräume $\mathcal{H}_s$ und $\mathcal{H}_a$ können durch Observable nicht miteinander verknüpft werden, d.h. alle Übergangsmatrixelemente verschwinden.

Fermionen

(655)

$$\mathcal{H}_a^{(N)} = \bigotimes^N \mathcal{H}$$

Abschließung des Raumes aller endlicher Linearkombinationen der Form

(656)

$$|\varphi\rangle = \sum_{\tau \in S_N} \text{sgn}(\tau) |\phi\rangle_{\tau(1)} |\phi\rangle_{\tau(2)} \cdots |\phi\rangle_{\tau(N)}$$

wobei $|\phi\rangle_i \in \mathcal{H}$

Bem: offensichtlich ist $|\psi\rangle \neq \vec{0}$ nur falls alle $|\phi\rangle_i$ linear unabhängig voneinander sind!

Pauli Prinzip

In einem System identischer Fermionen kann jeder (linear unabhängige) Einteilchenzustand nur einmal besetzt werden.

Bosonen

(657)

$$\mathcal{H}_S^{(N)} = \bigotimes^N \mathcal{H}$$

Abschließung des Raumes aller endlichen Linearkombinationen

(658)
$$|\psi\rangle = \sum_{\tau \in S_N} |\phi\rangle_{\tau(1)} |\phi\rangle_{\tau(2)} \cdots |\phi\rangle_{\tau(N)}$$

wobei $|\phi\rangle_i \in \mathcal{H}$

Bem: Ein Einteilchenzustand kann hier mehrfach besetzt sein.

Spin-Statistik Theorem

Identische Teilchen mit ganzzahligem Spin $s=0,1,2,\dots$ werden durch Zustände in $\mathcal{H}_s^{(N)}$ (Bosonen) beschrieben. Identische Teilchen mit halbzahligem Spin $s=\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$ werden durch Zustände in $\mathcal{H}_{as}^{(N)}$ (Fermionen) beschrieben.

Beweis: ohne (siehe relativistische QFT)

Frage: Müssen alle Elektronen im Universum
sich durch antisymmetrische Vielteilchen
Zustände beschreiben lassen?

Unterscheidbarkeit identischer Teilchen

Makroskopisch getrennte, identische Teilchen
können als unterscheidbar angesehen werden!

- Einteilchenzustände $\{ |f\rangle, |g\rangle, \dots \}$

- "makroskopisch getrennt":

Träger von $\langle \vec{x} | f \rangle$ B_1 mit $B_1 \cap B_2 = \emptyset$
 $\langle \vec{x} | g \rangle$ B_2

Seien $\hat{P}_1$ und $\hat{P}_2$ Projektoren auf die
Raumbereiche B_1 bzw. B_2

$$\hat{P}_1|f\rangle \simeq |f\rangle \quad \text{aber} \quad \hat{P}_1|g\rangle \simeq 0$$

$$\hat{P}_2|g\rangle \simeq |g\rangle \quad \text{aber} \quad \hat{P}_2|f\rangle \simeq 0$$

Für alle lokalen Einteilchenobservablen $\hat{A}$ gilt

$$\hat{P}_1 \hat{A} \hat{P}_2 = \hat{P}_2 \hat{A} \hat{P}_1 = 0$$

Sei nun

$$|\psi\rangle_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|f\rangle_A |g\rangle_B \pm |g\rangle_A |f\rangle_B \right)$$

Symmetrischer / antisymmetrischer Zustand
in $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ und

$$\hat{A} = \hat{A}_A + \hat{A}_B$$

Einteilchen-

$$\hat{B} = \hat{A}_A \hat{A}_B$$

Zweiteilchenoperator

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} {}_{\pm} \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle_{\pm} &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\langle g |_B \langle f |_A \pm \langle f |_B \langle g |_A \right) (\hat{A}_A + \hat{A}_B) \right. \\ &\quad \left. \cdot \left(|f\rangle_A |g\rangle_B \pm |g\rangle_A |f\rangle_B \right) \right\} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \langle f | \hat{A}_A | f \rangle_A + \langle g | \hat{A}_B | g \rangle_B + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \langle g | \hat{A}_A | g \rangle_A + \langle f | \hat{A}_B | f \rangle_B + \\
& \pm \left(\underbrace{\langle g | \hat{A}_A | f \rangle_A + \dots}_{\equiv 0} \right) \}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Symmetrisierung / Antisymmetrisierung ist irrelevant

12.3 Zwei Elektronen im Coulomb- potential

Hilbertraum

$$(659) \quad \mathcal{H} = \left(\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^2 \right) \overset{\text{as}}{\otimes} \left(\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^2 \right)$$

Hamiltonoperator (in Ortsdarstellung)

$$(660) \quad \hat{H} = \sum_{j=1}^2 \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_j - \frac{Ze^2}{|\vec{r}_j|} \right) + \frac{ke^2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

Einteilchenhamiltonoperatoren Wechselwirkungsoperator

Erhaltungsgrößen

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$$

$$\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$$

$$(661) \quad [\hat{H}, \hat{L}_j] = [\hat{H}, \hat{S}_j] = 0 \quad j = x, y, z$$

Satz paarweise kommutierende Operatoren

$$\hat{H}, \hat{L}^2, \hat{L}_z, \hat{S}^2, \hat{S}_z, \hat{P}_{12}$$

Da wir nur zwei Teilchen betrachten, gilt die Zerlegung des totalen antisymm. Hilbertraumes

$$(662) \quad \mathcal{H}_{as}^{(2)} = (\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^2) \otimes (\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^2) \\ = \mathcal{H}(0) \oplus \mathcal{H}(1)$$

wobei

$$\mathcal{H}(0) = \left[\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3) \overset{s}{\otimes} \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3) \right] \otimes \left[\mathbb{C}^2 \overset{as}{\otimes} \mathbb{C}^2 \right]$$

(663)

symmetrische Ortsraum-
wellenfunktion

anti-symmetrische
Spinwellenfunktion

und

$$(664) \quad \mathcal{H}(1) = \left[\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3) \overset{as}{\otimes} \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3) \right] \otimes \left[\mathbb{C}^2 \overset{s}{\otimes} \mathbb{C}^2 \right]$$

antisymmetrische Ortsraum-
wellenfunktion

symmetrische
Spinwellenfunktion

Konstruktion der Wellenfunktionen

(i) $\mathbb{C}^2 \otimes^{\text{as}} \mathbb{C}^2$ ist eindimensional

$$(665) \quad |\chi_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\downarrow\rangle |\uparrow\rangle - |\uparrow\rangle |\downarrow\rangle)$$

$$\hat{S}_z |\chi_{00}\rangle = (\hat{S}_z^1 + \hat{S}_z^2) |\chi_{00}\rangle = 0$$

dasselbe gilt für x, y Komponenten

$$(666) \quad \hat{S}_x |\chi_{00}\rangle = \hat{S}_y |\chi_{00}\rangle = \hat{S}_z |\chi_{00}\rangle = 0$$

Damit ist $|\chi_{00}\rangle$ Ez von $\hat{S}^2$ zu $S=0$

$$\begin{aligned} \hat{S}^2 |\chi_{00}\rangle &= (\hat{S}_1^2 + \hat{S}_2^2 + 2\vec{\hat{S}}_1 \cdot \vec{\hat{S}}_2) |\chi_{00}\rangle \\ &= (\hat{S}_1^2 + \hat{S}_2^2 + 2\hat{S}_1^+ \hat{S}_2^- + \hat{S}_1^- \hat{S}_2^+ + \hat{S}_1^- \hat{S}_1^+ + \hat{S}_2^- \hat{S}_2^+) |\chi_{00}\rangle \end{aligned}$$

$$\text{mit } \hat{S}_- |\downarrow\rangle = 0 \quad \hat{S}_+ |\uparrow\rangle = 0$$

$$\hat{S}_+ |\downarrow\rangle = \hbar \sqrt{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)} |\uparrow\rangle = \hbar |\uparrow\rangle$$

$$\hat{S}_- |\uparrow\rangle = \hbar \sqrt{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)} |\downarrow\rangle = \hbar |\downarrow\rangle$$

$$\Rightarrow \hat{S}^2 |\chi_{00}\rangle = \hbar^2 \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + 2 \cdot 0 - 1 - \frac{1}{2} \right) |\chi_{00}\rangle = 0$$

Spin Singlet

$$\hat{S}_j |\chi_{00}\rangle = 0 \quad \hat{S}^2 |\chi_{00}\rangle = 0 \quad (667)$$

(ii) $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ ist dreidimensional

$$|\chi_{11}\rangle = |\uparrow\rangle |\uparrow\rangle \quad S=1 \quad M_S = +1$$

$$|\chi_{10}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle |\downarrow\rangle + |\downarrow\rangle |\uparrow\rangle) \quad S=1 \quad M_S = 0$$

$$|\chi_{1-1}\rangle = |\downarrow\rangle |\downarrow\rangle \quad S=1 \quad M_S = -1$$

(668)

Spin Triplet

Damit bekommen wir insgesamt

$$\mathcal{H}_{(0)} \quad 4^2 = \phi^{(S)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \otimes \chi_{00}$$

$$\mathcal{H}_{(1)} \quad 4^2 = \phi^{(AS)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \otimes \chi_{1\mu}$$

(669)

$\mu = +1, 0, -1$

12.4 Vielteilchenwellenfunktionen

identischer Teilchen

Nun wollen wir Satzsätze für vollständig symmetrische bzw. vollständig antisymmetrische N -Teilchenzustände konstruieren.

Es sei $\{\phi_k(\vec{r})\}_{k \in \mathbb{N}}$ VONB von
Einteilchenzuständen

(A) antisymmetrische Wellenfunktion von N Teilchen

$$\phi_{l_1 l_2 \dots l_N}^{(as)} = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\tau \in S_N} \text{sgn}(\tau) \phi_{l_{\tau(1)}}(\vec{r}_1) \phi_{l_{\tau(2)}}(\vec{r}_2) \dots \phi_{l_{\tau(N)}}(\vec{r}_N)$$

$$l_1 < l_2 < \dots < l_N$$

(670)

Slater Determinante

$$\begin{aligned} \phi_{l_1 l_2 \dots l_N}^{(as)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \phi_{l_1}(\vec{r}_1) & \phi_{l_2}(\vec{r}_1) & \dots & \phi_{l_N}(\vec{r}_1) \\ \phi_{l_1}(\vec{r}_2) & \phi_{l_2}(\vec{r}_2) & \dots & \phi_{l_N}(\vec{r}_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_{l_1}(\vec{r}_N) & \phi_{l_2}(\vec{r}_N) & & \phi_{l_N}(\vec{r}_N) \end{vmatrix} \end{aligned} \quad \begin{matrix} r_1 \\ r_2 \\ \\ r_N \end{matrix}$$

$l_1 \qquad l_2 \qquad \qquad l_N$

(B) symmetrische Wellenfunktion von N Teilchen

Jetzt mehr als ein Teilchen im selben Einteilchen-
zustand möglich!

n_{e_1} Anzahl der Teilchen in ϕ_{e_1}

n_{e_r} — | — in ϕ_{e_r}

Besetzungszahlen

$$r \leq N$$

$$(672) \quad n_{e_1} + n_{e_2} + \dots + n_{e_r} = N$$

$$\begin{aligned} \phi_{n_{e_1} n_{e_2} \dots n_{e_r}}^{(s)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) &= \quad (673) \\ &= \frac{1}{\sqrt{N! n_{e_1}! n_{e_2}! \dots n_{e_r}!}} \sum_{\tau \in S_N} \phi_{\tau(1)}(\vec{r}_1) \dots \phi_{\tau(N)}(\vec{r}_N) \end{aligned}$$

Man sieht, daß Gl. (671) und (673) etwas unhandlich sind. Es gibt aber eine elegantere Art der "Buchhaltung"

12.5 Der Fock-Raum, Teilchenerzeugungs- und Vernichtungsoperatoren

Basisssysteme für N Teilchensysteme von Fermionen (total antisymmetrisch) und Bosonen (symmetrisch) sind durch Angabe der Besetzungszahlen

der Einteilchenzustände vollständig bestimmt.

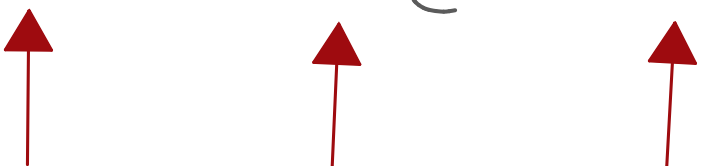
Fermionen $n = 0, 1$

Bosonen $n = 0, 1, 2, \dots, N$

Das wollen wir jetzt geschickt ausnutzen!

Def: Sei $\mathcal{H}$ der Hilbertraum eines Teilchens.
und $\mathcal{H}_\varepsilon^{(n)}$ das n -fache symmetrische
($\varepsilon = "s"$) oder antisymmetrische ($\varepsilon = "as"$)
Tensorprodukt von $\mathcal{H}$. Dann heißt

$$\mathcal{F}_\varepsilon(\mathcal{H}) = \mathcal{H}^{(0)} \oplus \mathcal{H}_\varepsilon^{(1)} \oplus \mathcal{H}_\varepsilon^{(2)} \oplus \dots = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_\varepsilon^{(n)}$$


kein ein zwei
Teilchen Teilchen Teilchen

Fock Raum (über $\mathcal{H}$). Hierbei beschreibt

$\mathcal{H}^{(0)} \equiv \mathbb{C}$ das System ohne Teilchen, d.h.
die physikalische Leere (Vakuum)

Der Zustand ohne Teilchen " $|0\rangle$ "
heißt Vakuumzustand

(A) Fock Raum der Bosonen

Def: Symmetrisierungsoperator

$$(674) \quad \hat{S}_n |\phi_1\rangle |\phi_2\rangle \cdots |\phi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{\tau \in S_n} |\phi_{\tau(1)}\rangle |\phi_{\tau(2)}\rangle \cdots |\phi_{\tau(n)}\rangle$$

Def.: Sei $|f\rangle \in \mathcal{H}$. Die Operatoren $\hat{a}_f$ und $\hat{a}_f^\dagger$ heißen Vernichtungs- bzw. Erzeugungsoperatoren von Teilchen im Zustand $|f\rangle$ wenn gilt:

$$(i) \quad \hat{a}_f : \mathcal{H}^{(n)} \longrightarrow 0$$

$$(675) \quad \hat{a}_f : \mathcal{H}_S^{(n)} \longrightarrow \mathcal{H}_S^{(n-1)} \quad n \in \mathbb{N}$$

$\hat{a}_f$ bildet also einen symmetrischen n -Teilchenzustand auf einen symmetrischen $(n-1)$ -Teilchenzustand ab.

$$(ii) \quad \hat{a}_f \hat{S}_n |\phi_1\rangle |\phi_2\rangle \cdots |\phi_n\rangle =$$

Symm. n -Teilchenzustand

$$(676) \quad = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\ell=1}^n \langle f | \phi_\ell \rangle \hat{S}_{n-1} |\phi_1\rangle \cdots |\phi_{\ell-1}\rangle |\phi_{\ell+1}\rangle \cdots |\phi_n\rangle$$

Symmetrischer $n-1$ -Teilchenzust.

$$(iii) \quad \hat{a}_f^\dagger : \mathcal{H}_S^{(n)} \longrightarrow \mathcal{H}_S^{(n+1)}$$

$$(677) \quad \hat{a}_f^\dagger |0\rangle = |f\rangle$$

$$\begin{aligned}
 (iv) \quad \hat{a}_f^\dagger \hat{S}_n |\phi_1\rangle \cdots |\phi_n\rangle &= \\
 (678) \quad &= \sqrt{n+1} \hat{S}_{n+1} |f\rangle |\phi_1\rangle \cdots |\phi_n\rangle
 \end{aligned}$$

$\hat{a}_f^\dagger$ ist der zu $\hat{a}_f$ in $\mathcal{F}_S(\mathcal{H})$ hermitisch adjungierte Operator

Satz: Seien $|f\rangle, |g\rangle$ Zustände in $\mathcal{H}$

$$\begin{aligned}
 (679) \quad \Rightarrow \quad [\hat{a}_f, \hat{a}_g] &= [\hat{a}_f^\dagger, \hat{a}_g^\dagger] = 0 \\
 [\hat{a}_f, \hat{a}_g^\dagger] &= \mathbb{1} \langle f|g\rangle
 \end{aligned}$$

Wählen wir speziell eine ONB $\{|\phi_n\rangle\}$

$$\hat{a}_n \equiv \hat{a}_{\phi_n} \quad \langle \phi_n | \phi_m \rangle = \delta_{nm}$$

(680)

$$[\hat{a}_n, \hat{a}_m^\dagger] = \delta_{nm}$$

Beweis von (679):

$$\begin{aligned}
 (i) \quad \hat{a}_g^\dagger \hat{a}_f^\dagger \hat{S}_n |\phi_1\rangle \cdots |\phi_n\rangle &= \\
 &= \hat{a}_g^\dagger \sqrt{n+1} \hat{S}_{n+1} |f\rangle |\phi_1\rangle \cdots |\phi_n\rangle \\
 &= \sqrt{(n+2)(n+1)} \hat{S}_{n+2} |g\rangle |f\rangle |\phi_1\rangle \cdots |\phi_n\rangle
 \end{aligned}$$

$$= \hat{a}_g^\dagger \hat{a}_f^\dagger \hat{S}_n |\phi_1\rangle \dots |\phi_n\rangle$$

$$\Rightarrow [\hat{a}_f^\dagger, \hat{a}_g^\dagger] = 0$$

$$(ii) \quad \hat{a}_f \hat{a}_g^\dagger \hat{S}_n |\phi_1\rangle \dots |\phi_n\rangle =$$

$$= \hat{a}_f \sqrt{n+1} \hat{S}_{n+1} |g\rangle |\phi_1\rangle \dots |\phi_n\rangle$$

$$= \langle f|g\rangle \hat{S}_n |\phi_1\rangle \dots |\phi_n\rangle$$

$$+ \sum_{j=1}^n \langle f|\phi_j\rangle \hat{S}_n |g\rangle |\phi_1\rangle \dots |\phi_{j-1}\rangle |\phi_{j+1}\rangle \dots |\phi_n\rangle$$

andere Seite gilt

$$\hat{a}_g^\dagger \hat{a}_f \hat{S}_n |\phi_1\rangle \dots |\phi_n\rangle =$$

$$= \hat{a}_g^\dagger \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \langle f|\phi_j\rangle \hat{S}_{n-1} |\phi_1\rangle \dots |\phi_{j-1}\rangle |\phi_{j+1}\rangle \dots |\phi_n\rangle$$

$$= \sum_{j=1}^n \langle f|\phi_j\rangle \hat{S}_n |g\rangle |\phi_1\rangle \dots |\phi_{j-1}\rangle |\phi_{j+1}\rangle \dots |\phi_n\rangle$$

$$\Rightarrow [\hat{a}_f, \hat{a}_g^\dagger] = \langle f|g\rangle \quad \square$$

Mit Hilfe der Erzeugungsoperatoren lässt sich jeder symmetrische n -Teilchenzustand aus dem Vakuum generieren!

Seien $\underline{n} = (n_1, n_2, \dots)$ die Besetzungszahlen in den Zuständen $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, \dots$ (ONB)

wobei

(681)

$$\sum_{e=1}^{\infty} n_e = n < \infty$$

(682)

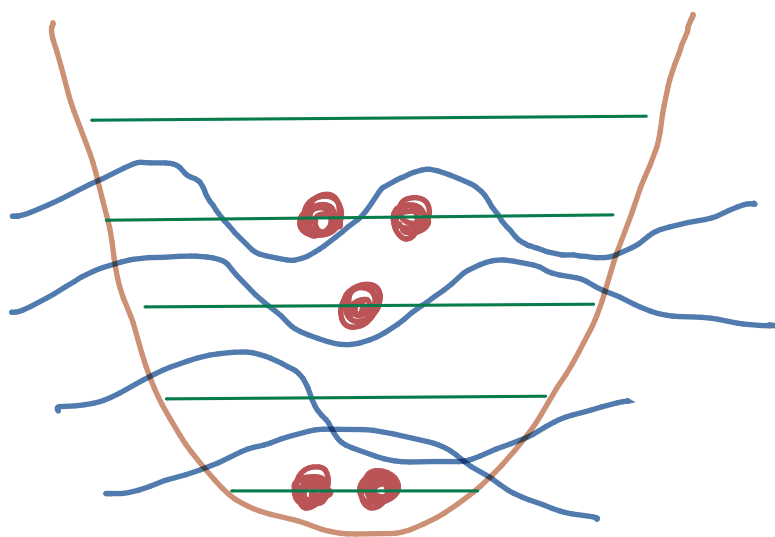
$$|\Psi_{\underline{n}}\rangle = \prod_{e=1}^{\infty} \frac{(\hat{a}_e^+)^{n_e}}{\sqrt{n_e!}} |0\rangle$$

Symmetrischer n -Teilchenzustand mit
 n_1 Bosonen im Zstd. $|\phi_1\rangle$

n_2 Bosonen im Zstd. $|\phi_2\rangle$ etc.

Bsp!:

ϕ_4
 ϕ_3
 ϕ_2
 ϕ_1



$\hat{a}_4^+{}^2$

$\hat{a}_3^+$

$\hat{a}_1^+{}^2$

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2!}} (\hat{a}_1^+)^2 \hat{a}_3^+ \frac{1}{\sqrt{2!}} (\hat{a}_4^+)^2 |0\rangle$$

Def:

Teilchenzahloperator im Zstd. $|\phi_e\rangle$

(683)

$$\hat{n}_e \equiv \hat{a}_e^+ \hat{a}_e$$

wie ham. Os2.

Operator der Gesamtteilchenzahl

$$(684) \quad \hat{n} = \sum_{l=1}^{\infty} \hat{n}_l$$

Bem: • In der nichtrelativistischen Quantenmechanik gilt stets

$$[\hat{n}, H] = 0$$

d.h. die Gesamtteilchenzahl ist eine Erhaltungsgröße

- In der Quantenfeldtheorie werden wir sehen, daß wir auch Prozesse betrachten können bei denen Teilchen erzeugt oder vernichtet werden

(B) Der Fock Raum der Fermionen

Def: Antisymmetrisierungoperator

$$(685) \quad \hat{A}_n |\phi_1\rangle \cdots |\phi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{\tau \in S_n} \text{sgn}(\tau) |\phi_{\tau(1)}\rangle |\phi_{\tau(2)}\rangle \cdots |\phi_{\tau(n)}\rangle$$

$$\hat{A}_n \text{ ist Projektor} \quad \hat{A}_n^2 = \hat{A}_n$$

analog zum Bosonenfall kann man definieren

Def: Sei $|f\rangle \in \mathcal{H}$. Die Operatoren $\hat{C}_f$ und $\hat{C}_f^\dagger$ heißen Vernichtungs- bzw.

Erzeugungsoperatoren von Fermionen im Zustand $|f\rangle$, wenn gilt:

$$(i) \quad \hat{C}_f : \mathcal{H}^{(0)} \rightarrow 0$$

$$(686) \quad \hat{C}_f : \mathcal{H}_{as}^{(n)} \rightarrow \mathcal{H}_{as}^{(n-1)} \quad n \in \mathbb{N}$$

$$(ii) \quad \hat{C}_f \hat{A}_n |\phi_1\rangle \dots |\phi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \langle f | \phi_j \rangle \cdot \hat{A}_{n-1} |\phi_1\rangle \dots |\phi_{j-1}\rangle |\phi_{j+1}\rangle \dots |\phi_n\rangle$$

(687)

$$(iii) \quad \hat{C}_f^\dagger : \mathcal{H}_{as}^{(n)} \rightarrow \mathcal{H}_{as}^{(n+1)}$$

$$(688) \quad \hat{C}_f^\dagger |0\rangle = |f\rangle$$

$$(iv) \quad \hat{C}_f^\dagger \hat{A}_n |\phi_1\rangle \dots |\phi_n\rangle = \sqrt{n+1} \hat{A}_{n+1} |f\rangle |\phi_1\rangle \dots |\phi_n\rangle \quad (689)$$

$\hat{C}_f^\dagger$ ist der zu $\hat{C}_f$ adjungierte Operator

Def: Antikommutator

$$(690) \quad \{\hat{A}, \hat{B}\} = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$$

Satz: Seien $|f\rangle$ und $|g\rangle \in \mathcal{H}$ dann gilt

$$(691) \quad \{\hat{C}_f, \hat{C}_g\} = \{\hat{C}_f^\dagger, \hat{C}_g^\dagger\} = 0$$

$$\{\hat{C}_f, \hat{C}_g^\dagger\} = \langle f|g\rangle$$

Beweis: analog zu Bosonen

Für orthonormale Basis $\{|\phi_n\rangle\}$ mit
 $\langle \phi_n | \phi_m \rangle = \delta_{nm}$ $\hat{C}_n \equiv \hat{C} \phi_n$

$$(692) \quad \{\hat{C}_n, \hat{C}_m^\dagger\} = \delta_{nm}$$

Folgerung:

$$(\hat{C}_n^\dagger)^2 = 0$$

Pauli Prinzip

Mit Hilfe der Erzeugungsoperatoren löst sich jeder anti-symmetrische n -Teilchenzustand aus dem Vakuum generieren!

$\underline{n} = (n_1, n_2, \dots)$ mit $n_i \in \{0, 1\}$

und $\sum_{\ell=1}^{\infty} n_\ell = n < \infty$ sei der Vektor

der Besetzungszahlen von Fermionen in den

Zuständen $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, \dots$ dann gilt

$$(693) \quad |\Psi_{\underline{n}}\rangle = (\hat{C}_1^+)^{n_1} (\hat{C}_2^+)^{n_2} \dots |0\rangle$$

Man beachte: für Fermionen $n_1, n_2, \dots \in \{0, 1\}$

Bem:

Pauliprinzip

$$(\hat{C}_e^+)^m |0\rangle = 0 \quad m \geq 2$$

analog zu Bosonen

Def: Teilchenzahloperator im Zustand $|\phi_e\rangle$

$$(694) \quad \hat{n}_e = \hat{C}_e^+ \hat{C}_e \quad e \in \mathbb{N}$$

Eigenschaft für fermionischen Teilchenzahloperator:

$$(695) \quad \hat{n}_e^2 = \hat{n}_e \quad \text{Projektor!}$$

EW

$$\lambda = 0, 1$$

ENDE