

## V. Symmetrien

### V.1. Symmetrien in der klassischen Mechanik

Noether Theorem:

Sind die Euler-Lagrangschen Bewegungsgleichungen invariant unter einer kontinuierlichen Koordinatentransformation  $(t, \vec{r}) \rightarrow (t'(t), \vec{r}'(\vec{r}, t))$  so resultiert daraus die Existenz eines Integrals der Bewegung (Erhaltungsgröße)

(a) Homogenität des Raumes

$$L(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t) \stackrel{!}{=} L(\vec{r}_i + \vec{a}, \dot{\vec{r}}_i, t) \quad \forall \vec{a}$$

$$\Rightarrow \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = 0 = \left( \sum_i \frac{\partial L}{\partial x_i}, \sum_i \frac{\partial L}{\partial y_i}, \sum_i \frac{\partial L}{\partial z_i} \right)$$

mit Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{d}{dt} P_x = 0 \quad P_x = \text{const}$$

analog  $P_y, P_z$

(b) Homogenität der Zeit

$$L(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t) = L(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i)$$

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \dot{\vec{r}}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \ddot{\vec{r}}_i + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial t}}_0$$

$$= \sum_i \underbrace{\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \right)}_{\text{mit Euler-Lagrange}} \dot{\vec{r}}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \ddot{\vec{r}}_i$$

$$= \sum_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \dot{\vec{r}}_i \right)$$

$\Rightarrow$

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\left( \sum_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} - L \right)}_H = 0 \quad H = \text{konst}$$

(c) Isohopie des Raumes

betrachten infinitesimale Rotationen

$$\delta \vec{\phi} = (\delta \phi_x, \delta \phi_y, \delta \phi_z)$$

$$\delta \vec{r}_i = \delta \vec{\phi} \times \vec{r}_i$$

$$\delta \vec{v}_i = \delta \vec{\phi} \times \vec{v}_i$$

$$\delta L = \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \cdot \delta \vec{r}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{v}}_i} \cdot \delta \dot{\vec{v}}_i \right) \stackrel{!}{=} 0$$

kanon. Impulse  $\vec{\pi}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{v}}_i}$   $\frac{d}{dt} \vec{\pi}_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{v}}_i} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \delta L &= \sum_i \left[ \dot{\vec{\pi}}_i \cdot (\delta \vec{\phi} \times \vec{r}_i) + \vec{\pi}_i \cdot (\delta \vec{\phi} \times \dot{\vec{r}}_i) \right] = 0 \\ &= \delta \vec{\phi} \cdot \underbrace{\frac{d}{dt} \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{\pi}_i)}_{\vec{L}} \quad \vec{L} = \text{konst} \end{aligned}$$

alle oben betrachteten Transformationen bilden kontinuierliche verbundene Gruppen

zur Erinnerung: Gruppe

Def: Elemente  $\{a, b, c, \dots\}$  einer Menge bilden Gruppe  $G$  falls Verknüpfung, genannt Multiplikation existiert mit

- (i)  $a, b \in G \quad a \cdot b \in G$
- (ii)  $\exists e : \quad a e = a = e a$
- (iii)  $\forall a \exists a^{-1}$  mit  $a a^{-1} = a^{-1} a = e$
- (iv)  $(ab)c = a(bc)$

Def: Eine Gruppe heißt abelsch falls

$$ab = ba \quad \forall a, b \in G$$

Def: Eine Gruppe heißt kontinuierlich, falls die Elemente durch ein oder mehrere kontinuierl. Parameter charakterisiert werden können.

Def: Eine Gruppe heißt kontinuierlich verbunden, falls eine kontinuierliche Veränderung der Parameter von einem Element zu allen anderen führt

Def: Eine Gruppe heißt kompakt, falls in jeder unendlichen Folge eine unendliche Teilfolge  $\{a_n\}$  existiert die gegen einen Grenzwert  $a$  konvergiert der Element der Gruppe ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in G$$

Def: Zwei Gruppen heißen isomorph wenn eine ein-einde-Zuordnung

$$\{a, b, \dots\} \quad \text{in } G_1 \quad \longleftrightarrow \quad \{a', b', \dots\} \quad \text{in } G_2$$

existiert mit

$$a \cdot b \leftrightarrow a' \cdot b' \quad \text{etc.}$$

Def: Ist  $G_1$  isomorph zu  $G_2$  deren Elemente Matrizen sind, so heißt  $G_2$  Matrixdarstellung von  $G_1$

## V.2. Symmetrien in der Quantenmechanik, Allgemeines

Was passiert mit q.m.-Wellenfunktion bei Koordinatentransformationen, speziell Translationen?

aktive Interpretation:  $U$  konstant, Wellenfunktion wird verschoben

$$\vec{r} \xleftarrow{\vec{a}} \quad \vec{r}' = \vec{r} + \vec{a}$$

(A)

(B)

$$\psi_A(\vec{r}) \stackrel{!}{=} \psi_B(\vec{r}') = \psi_B(\vec{r} + \vec{a})$$

räumliche Verschiebung erhält Norm  $\Rightarrow$  unitäre Operation?

$$\psi_B(\vec{r}) = U(\vec{a}) \psi_A(\vec{r}) = \psi_A(\vec{r} - \vec{a})$$

$$= \psi_A(\vec{r}) - \vec{a} \cdot \vec{\nabla} \psi_A(\vec{r}) + \dots \quad \text{Taylor}$$

$$U(\vec{a}) = e^{-\vec{a} \cdot \vec{\nabla}} = e^{-i \frac{\vec{a} \cdot \vec{p}}{\hbar}}$$

siehe auch  
a.H.I

man sieht

$$\boxed{U(\vec{a}) U(\vec{b}) = e^{-i \frac{\vec{a} \cdot \vec{p}}{\hbar}} e^{-i \frac{\vec{b} \cdot \vec{p}}{\hbar}} = e^{-i (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{p} / \hbar} = U(\vec{a} + \vec{b})}$$

d.h.  $\{\vec{a}\} \longleftrightarrow \{U(\vec{a})\}$  ist Gruppenisomorphismus

$\hat{U}$  ist unitär

$$\hat{U}^{-1} = \hat{U}^\dagger$$

Bewegungsgleichung verschobener Zustände

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_A(\vec{r}, t) = \hat{H} \psi_A(\vec{r}, t)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_B(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(\vec{a}) \psi_A(\vec{r}, t)$$

$$= U(\vec{a}) \hat{H} \psi_A(\vec{r}, t) = U(\vec{a}) \hat{H} U^{-1}(\vec{a}) \psi_B(\vec{r}, t)$$

$$\boxed{\hat{H}_B = \hat{U}(\vec{a}) \hat{H} \hat{U}^{-1}(\vec{a})}$$

Invarianz der Bewegungsgleichung erfordert

$$\boxed{[\hat{H}, \hat{U}(\vec{a})] \stackrel{!}{=} 0} \quad \Leftrightarrow \quad \underset{\text{hier}}{[\hat{H}, \hat{\vec{p}}] = 0}$$

Def: Eine Transformationsgruppe heißt Symmetriegruppe wenn die zugehörige unitäre Darstellung  $\hat{U}$  mit dem Hamiltonoperator kommutiert.  
Die Gruppe muß nicht kontinuierlich sein.

Symmetrien und Entartung von Eigenwerten von  $\hat{H}$

sei  $|\phi_E\rangle$  Eigenzustand von  $\hat{H}$  zum Eigenwert  $E$   
ist  $\hat{U}$  Element einer Symmetriegruppe gilt

$$|\phi'_E\rangle = \hat{U} |\phi_E\rangle \text{ ist ebenfalls Eigenzustand}$$

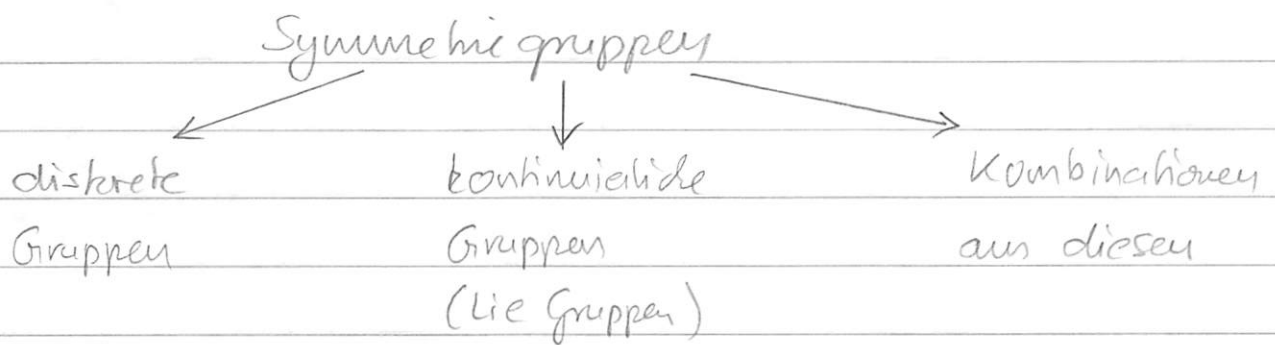
von  $\hat{H}$  zu  $E$

$$\hat{H} |\phi_E'\rangle = \hat{H} \hat{U} |\phi_E\rangle = \hat{U} \hat{H} |\phi_E\rangle = E \hat{U} |\phi_E\rangle$$

Falls zwei unitäre Operatoren  $\hat{U}_1, \hat{U}_2$  existieren mit

$$[\hat{U}_1, \hat{U}_2] \neq 0 \quad [\hat{U}_1, \hat{H}] = [\hat{U}_2, \hat{H}] = 0$$

dann existieren linear unabh. Eigenvektoren  $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle$  die EZ von  $\hat{H}$  sind  $\Rightarrow$  Entartung



## Lie - Gruppen

Def: kont. Gruppen deren Elemente unitäre Operatoren  $\hat{U}(a_1, \dots, a_n)$  sind, die analytisch von  $n$  Parametern  $a_1, \dots, a_n$  abhängen, die die Elemente eindeutig festlegen heißen Lie Gruppen

es ist  $\hat{U}(0) \stackrel{!}{=} \mathbb{1}$

Def: Die  $n$  Größen

$$\hat{L}_\mu = i \left. \frac{\partial \hat{U}(a_i)}{\partial a_\mu} \right|_{\vec{a}=0}$$

heißt Generatoren der Lie Gruppe

infinitesimale Transformation in der Nähe der Identität

$$\begin{aligned}\hat{U}(\delta\alpha_\mu) &= \hat{U}(0) + \left. \frac{\partial \hat{U}}{\partial \alpha_\mu} \right|_{\vec{\alpha}=0} \delta\alpha_\mu \\ &= \mathbb{1} - i \hat{L}_\mu \delta\alpha_\mu\end{aligned}$$

endliche Transformation  $\Delta\alpha_\mu = N \delta\alpha_\mu$

$$\hat{U}(\Delta\alpha_\mu) = [\hat{U}(\delta\alpha_\mu)]^N = \left[ \mathbb{1} - i \hat{L}_\mu \frac{\Delta\alpha_\mu}{N} \right]^N$$

lim  $N \rightarrow \infty$

$$\boxed{\hat{U}(\Delta\alpha_\mu) = e^{-i \hat{L}_\mu \Delta\alpha_\mu}}$$

für reelle Parameter  $\alpha_\mu$  folgt

$$\hat{L}_\mu^\dagger = \hat{L}_\mu$$

betrachten  $U^{-1}(\{\delta\alpha_\mu\})$  in 2. Ordnung in  $\delta\alpha_\mu$

$$U^{-1}(\{\delta\alpha_\mu\}) = \mathbb{1} + i \sum_\mu \hat{L}_\mu \delta\alpha_\mu - \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} \hat{L}_\mu \hat{L}_\nu \delta\alpha_\mu \delta\alpha_\nu$$

$$U^{-1}(\delta\beta_\mu) U^{-1}(\delta\alpha_\mu) \hat{U}(\delta\beta_\mu) \hat{U}(\delta\alpha_\mu) =$$

$$\begin{aligned}&= \left( 1 + i \delta\beta_\mu \hat{L}_\mu - \frac{1}{2} \delta\beta_\nu \delta\beta_\lambda \hat{L}_\nu \hat{L}_\lambda \right) \left( 1 + i \delta\alpha_\epsilon \hat{L}_\epsilon - \frac{1}{2} \delta\alpha_\delta \delta\alpha_\gamma \hat{L}_\delta \hat{L}_\gamma \right) \\ &\cdot \left( 1 - i \delta\beta_\epsilon \hat{L}_\epsilon - \frac{1}{2} \delta\beta_\omega \delta\beta_\varphi \hat{L}_\omega \hat{L}_\varphi \right) \left( 1 - i \delta\alpha_\eta \hat{L}_\eta - \frac{1}{2} \delta\alpha_\tau \delta\alpha_\varsigma \hat{L}_\tau \hat{L}_\varsigma \right)\end{aligned}$$



$$= \dots = 1 + \delta\alpha_\mu \delta\beta_\nu (\hat{L}_\mu \hat{L}_\nu - \hat{L}_\nu \hat{L}_\mu)$$

muß wieder  
Generator sein

$$\Rightarrow \delta\alpha_\mu \delta\beta_\nu (\hat{L}_\mu \hat{L}_\nu - \hat{L}_\nu \hat{L}_\mu) = -i \delta g_a \hat{L}_a$$

schem  $-i \delta g_a = C_{\mu\nu a} \delta\alpha_\mu \delta\beta_\nu$

$$\boxed{[\hat{L}_\mu, \hat{L}_\nu] = C_{\mu\nu a} \hat{L}_a}$$

Lie Algebra

Die  $C_{\mu\nu a}$  heißen Strukturfaktoren

Die Lie-Algebra ist geschlossen unter Kommutation.

Jakobi Identität (leicht nachzuprüfen)

$$[[\hat{L}_i, \hat{L}_j], \hat{L}_k] + [[\hat{L}_j, \hat{L}_k], \hat{L}_i] + [[\hat{L}_k, \hat{L}_i], \hat{L}_j] = 0$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{C_{ijm} C_{mkn} + C_{jkm} C_{min} + C_{kim} C_{mjn} = 0}$$

Def: Die Anzahl der untereinander kommutierenden Generatoren einer Lie Gruppe heißt Rang der Gruppe

Bspl: • Translationsgruppe in  $\mathbb{R}^3$  ist vom Rang 3  
da  $[P_x, P_y] = [P_x, P_z] = [P_y, P_z] = 0$

• Rotationsgruppe ist vom Rang 1

• Halbeinfache Lie Gruppen, Normalteiler,

Gruppe  $G : \{g_r\}$

$g_r^+ = g_r^{-1}$  unitärer Op.

Untergruppe  $A : \{a_i\}$

Def:  $A$  heißt Normalteiler von  $G$ , falls

$$\forall g_r \in G, a_i \in A \quad g_r a_i g_r^{-1} = a_j$$

$A$  heißt abelscher Normalteiler falls zusätzlich

$$a_i a_j = a_j a_i \quad \forall a_i, a_j \in A$$

Bspl: Translations - Rotationsgruppe

Generatoren:  $\hat{P}_x, \hat{P}_y, \hat{P}_z, \hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z$

Translation ist abelscher Normalteiler

$$R T R^{-1} = T'$$

Def: Eine Lie Gruppe heißt einfach wenn sie  
keinen kontinuierlichen (d.h. Lieschen)  
Normalteiler besitzt; sie heißt halbeinfach  
 falls sie keinen abelschen kontinuierlichen  
Normalteiler besitzt

obige Definitionen haben ihr Pendant auf der Ebene  
 der Lie Algebra:

Seien  $\hat{G}_n$  Generatoren von  $G$   
 $\hat{A}_e$  Generatoren von  $A$

Dann ist  $A$  Untergruppe von  $G$

$$[\hat{A}_e, \hat{A}_m] = C_{emn} \hat{A}_n \Rightarrow \text{Die Generatoren } \hat{A}_e \text{ einer Untergruppe bilden eine Unteralgebra}$$

Dann ist  $A$  Normalteiler von  $G$  iff

$$g v a_i g^{-1} = a_j \in A$$

$$\text{d.h. } g v a_i g^{-1} a_i^{-1} = a_j a_i^{-1} = a_m \in A$$

$$g_v = 1 - i \delta \alpha_i \hat{G}_i - \frac{1}{2} \delta \alpha_i \delta \alpha_j \hat{G}_i \hat{G}_j$$

$$a_i = 1 - i \delta \beta_n \hat{A}_n - \frac{1}{2} \delta \beta_n \delta \beta_e \hat{A}_n \hat{A}_e$$

analog zur Rechnung bei Ableitung der Strukturkonstanten

$$a_m = 1 - i \delta \gamma_m \hat{A}_m$$

$$\Rightarrow [\hat{G}_i, \hat{A}_k] = a_{ikm} \hat{A}_m$$

Def: Eine Unteralgebra  $\{\hat{A}_k\}$  einer Algebra  $\{\hat{G}_e\}$  heißt Ideal wenn gilt  $\forall \hat{A}_k, \hat{G}_i$

$$[\hat{G}_i, \hat{A}_k] = a_{ikm} \hat{A}_m$$

Def: Eine Lie-Algebra  $\{\hat{G}_e\}$  heißt einfach, wenn sie kein Ideal außer dem Null-Ideal  $\{0\}$  besitzt. Sie heißt halbeinfach wenn sie kein abelsches Ideal besitzt.

Satz: (Cartan)

Seien  $C_{ij}$  die Strukturkonstanten einer Lie-Algebra. Die Lie Algebra ist dann und nur dann halbeinfach falls

$$\det(g_{\alpha\beta}) \neq 0$$

$$\text{wobei } g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha} \equiv C_{\alpha\mu\nu} C_{\beta\mu\nu}$$

Bspl:

$SO(3)$

$$[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i \epsilon_{ijk} \hat{J}_k$$

$$g_{\alpha\beta} = i \epsilon_{\alpha\mu\nu} i \epsilon_{\beta\mu\nu} = \epsilon_{\alpha\mu\nu} \epsilon_{\beta\mu\nu}$$

$$= 2 \delta_{\alpha\beta} \quad \det g_{\alpha\beta} = 8$$

## Invariante Operatoren (Casimir Operatoren)

### Theorem von Racah:

Für jede halbeinfache Lie Gruppe vom Rang  $l$  existieren  $l$  invariante Operatoren, oder Casimir Operatoren  $\hat{C}_\lambda$ ,  $\lambda = 1, 2, \dots, l$ . Diese sind Funktionen der Generatoren und kommutieren mit jedem Operator der Gruppe.

Bspl:

$SO(3)$ , halbeinfach Rang 1  
 $\Rightarrow \exists 1$  Casimiroperator:  $\hat{L}^2$

$$[\hat{L}^2, \hat{L}_i] = 0$$

Ist eine Lie-Gruppe eine Symmetriegruppe eines q.m. Systems so charakterisieren die Eigenwerte der Casimir-Operatoren Multiplikts. Die zugehörigen Eigenzustände spannen einen invarianten Unterraum auf, d.h. einen Unterraum der durch unitäre Gruppenoperationen nicht verlassen wird.

Bspl:

$Y_{00}, Y_{11}, Y_{10}, Y_{1-1}$  4-dim. Unterraum  
bzgl. Rotationsgruppe

$$\hat{L}_\pm Y_{lm} = (\hat{L}_x \pm i \hat{L}_y) Y_{lm} = \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)} Y_{l, m \pm 1}$$

$$G = \{Y_{00}\} \oplus \{Y_{11}, Y_{10}, Y_{1-1}\} \quad \text{--- 11.9.1 ---}$$

am Beispiel des Unterraumes  $(Y_{00}, Y_{11}, Y_{10}, Y_{1-1}) = A$   
 haben wir gesehen, daß eine Zerlegung

$$A = \{Y_{00}\} \oplus \{Y_{11}, Y_{10}, Y_{1-1}\}$$

nach invarianten Unterräumen möglich ist

$\{Y_{00}\}$  ist ein eindimensionaler invarianter Unterraum

$\{Y_{11}, Y_{10}, Y_{1-1}\}$  ist ein dreidim. invarianter Unterraum

Die Elemente  $\hat{U}(\alpha_\mu) = e^{-i\hat{L}_\mu \alpha_\mu}$  der Li Gruppe der Rotationen lassen sich durch Matrizen auf den invarianten Unterräumen darstellen

$$\hat{U}(\alpha_\mu) \leftrightarrow \begin{pmatrix} U_0 & & & \\ & U_{-11} & U_{-10} & U_{-1-1} \\ & U_{0-1} & U_{00} & U_{01} \\ & U_{1-1} & U_{10} & U_{11} \\ & & & \dots \end{pmatrix}$$

Def: Ist  $\hat{U}$  eine Kommut. Gruppe (Li Gruppe) unitärer Operatoren auf einem Hilbertraum  $\mathcal{H}$  so heißt die Matrixdarstellung von  $\hat{U}$  auf  $\mathcal{H}$  reduzibel falls invariante Unterräume von  $\mathcal{H}$  existieren. Andernfalls heißt die Matrixdarstellung irreduzibel

Der Hamiltonoperator ist auf dem Multipl. entartet

Bew: Sei  $|\psi_0\rangle$  Element eines Multipl. mit

$$H|\psi_0\rangle = E|\psi_0\rangle$$

$\hat{U}(\alpha)|\psi_0\rangle$  wieder Element des Multipl.

$$\hat{H}\hat{U}|\psi_0\rangle = \hat{U}\hat{H}|\psi_0\rangle = E\hat{U}|\psi_0\rangle \quad \square$$

Bemerk:  $\nexists$  allgemeine Vorschrift zur Konstruktion von Casimiroperatoren

Für  $SU(n)$  gilt, daß Casimiroperatoren einfache homogene Polynome in den Generatoren sind

Satz: Jeder Operator  $\hat{A}$  der mit allen Operatoren einer Lie Gruppe (also mit allen Generatoren  $\hat{L}_\mu$ ) kommutiert ist eine Funktion der Casimir-Operatoren der Gruppe

$\Rightarrow$  ist Lie Gruppe Symmetriegruppe  $\Rightarrow \hat{H}$  ist Funktion der Casimir-Operatoren

Bsp!: translationsinvariantes System, Rang 3  
Casimir-Operator  $\hat{\vec{p}} = (\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z)$

$$\hat{H} = \alpha + \vec{\beta} \cdot \vec{\hat{p}} + \gamma \hat{\vec{p}}^2 + \dots$$

Mit Zeitumkehrinvarianz  $\hat{H} \rightarrow \hat{H}$   
 $\hat{\vec{p}} \rightarrow -\hat{\vec{p}}$

nur gerade Potenzen

$$\hat{H} = \alpha + \gamma \hat{\vec{p}}^2$$

einige wichtige Gruppen

| Gruppe                               | Generatoren                                                            | Rang | Casimir-Op.                                           | Typ                                                                    |
|--------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|------|-------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|
| Translation                          | $\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z$                                      | 3    | $\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z$                     | abelsch                                                                |
| Rotation                             | $\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z$                                      | 1    | $\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$ | einfach<br>$\Rightarrow$ halbeinfach                                   |
| euklidische Gruppe<br>Transl. + Rot. | $\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z$<br>$\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z$ | 3    | $\hat{\vec{p}}^2, \hat{\vec{p}} \cdot \hat{\vec{L}}$  | weder einfach<br>noch halbeinfach<br>(Poincaré Theorem<br>gilt nicht!) |
| Inversion                            | $\hat{p}$                                                              | 1    | $\hat{p}$                                             | diskret                                                                |



### V.3. Rotationen

Gruppe der Rotationen im  $\mathbb{R}^3$ : orthogonale Matrizen  $R$   
mit  $\det(R) = +1 \Rightarrow SO(3)$

Drehachse  $\vec{n}$   $|\vec{n}| = 1$

Drehwinkel  $\alpha$

$$\vec{y} = R(\vec{n}, \alpha) \vec{x}$$

infinitesimale Drehung

$$R(\vec{n}, \delta\alpha) \vec{x} = \vec{x} + \delta\alpha (\vec{n} \times \vec{x}) + \mathcal{O}(\delta\alpha^2)$$

führen wir die hermiteschen Matrizen  $\vec{e}^j$   $j=1,2,3$  ein  
gemäß

$$(e^j)_{km} \equiv i \epsilon_{jkm}$$

$\Rightarrow$

$$R(\vec{n}, \delta\alpha) \vec{x} = \vec{x} - i\delta\alpha \vec{n}_j \vec{e}^j \vec{x} + \mathcal{O}(\delta\alpha^2)$$

$$\text{mit } \vec{e} = e^1 \vec{e}_x + e^2 \vec{e}_y + e^3 \vec{e}_z$$

Nacheinanderausführung  $\alpha = N \delta\alpha$

$$R(\vec{n}, \alpha) \vec{x} = \left( 1 - i \frac{\alpha}{N} n_j e^j \right)^N \vec{x}$$

$$\xrightarrow{N \rightarrow \infty} e^{-i\alpha n_j e^j} \vec{x}$$

$$R(\vec{n}, \alpha) = \exp \{ -i \alpha n_j e^j \}$$

Sammeln-  
konvention

Drehmatrix mit Drehachse  $\vec{n}$  und Winkel  $\alpha$

(A) Unitäre Darstellung der <sup>Drehgruppe</sup> ~~Satz~~ für spinlose Teilchen

Was ist zugehörige unitäre Operation der Wellenfunktion?

$$\vec{r} \xrightarrow{R(\vec{n}, \alpha)} \vec{r}' = R(\vec{n}, \alpha) \vec{r}$$

(A)

(B)

$$\psi_A(\vec{r}) \stackrel{!}{=} \psi_B(\vec{r}') = \psi_B(R(\vec{n}, \alpha) \vec{r})$$

$$\psi_B(\vec{r}) = U_{R(\vec{n}, \alpha)} \psi_A(\vec{r}) = \psi_A(R^{-1}(\vec{n}, \alpha) \vec{r})$$

betrachten infinitesimale Drehung  $\Rightarrow$  Taylorreihe

$$\psi_A(R^{-1}(\vec{n}, \alpha) \vec{r}) \approx \psi_A \left( (1 + i \delta \alpha n_j e^j) \vec{r} \right) + \mathcal{O}(\delta \alpha^2)$$

$$= \psi_A(\vec{r}) + i \delta \alpha (n_j e^j \vec{r}) \cdot \vec{\nabla} \psi_A(\vec{r}) + \mathcal{O}(\delta \alpha^2)$$

$\Rightarrow$

$$U_{R(\vec{n}, \alpha)} = \exp \left\{ -\alpha (n_j e^j \vec{r}) \cdot \frac{\vec{p}}{\hbar} \right\}$$

$$(n_j e^j \vec{r}) \cdot \vec{p} = i n_j \epsilon_{jkm} \hat{X}_k \hat{p}_m = i \vec{n} \cdot (\vec{r} \times \vec{p})$$

$$U_R(\vec{n}, \alpha) = \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \alpha (\vec{n} \cdot \vec{L}) \right\}$$

Unitärer Operator der Drehung für spinlose Teilchen

Generatoren:  $\hat{L}_\mu$   $[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i \epsilon_{ijk} \hat{L}_k$

Casimir-Operator  $\hat{L}^2$

(B) Unitäre Darstellung der Drehgruppe für Spin  $\frac{1}{2}$  Teilchen

Sei  $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$  Zweikomponenten spinor

• Translation:  $\vec{r} \xrightarrow{\vec{a}} \vec{r}' = \vec{r} + \vec{a}$   
(A) (B)

$$\psi_A(\vec{r}) \stackrel{!}{=} \psi_B(\vec{r}') = \psi_B(\vec{r} + \vec{a})$$

d.h.  $\psi_B(\vec{r}) = \psi_A(\vec{r} - \vec{a}) = U_{\vec{a}}^{-1} \psi_A(\vec{r})$   
 $= e^{-i \frac{\vec{a} \cdot \vec{p}}{\hbar}} \psi_A(\vec{r})$

wie für 1-komponentige Wellenfunktion

• Rotation ?

$$\psi'(\vec{r}, t) = \hat{U}_{R(\vec{n}, \alpha)} \psi(\vec{r}, t)$$

$\hat{U}$  ist  $2 \times 2$  Matrix !

Bestimmung von  $\hat{U}_R$  aus zwei Forderungen

(i)  $\psi^\dagger \psi$  verhält sich bei Rotationen wie ein Skalar !

(ii)  $\vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}$  verhält sich bei Rotationen wie ein Vektor

aus (i)  $\psi^{\dagger+}(\vec{r}) \psi'(\vec{r}) = \psi^\dagger(R^{-1}\vec{r}) \psi(R^{-1}\vec{r})$

$$= \sum_{m=1}^2 \psi_m^*(R^{-1}\vec{r}) \psi_m(R^{-1}\vec{r})$$

$$= \sum_{m=1}^2 \left[ e^{-\frac{i}{\hbar} \alpha \vec{n} \cdot \vec{L}} \psi_m(\vec{r}) \right]^* \left[ e^{-\frac{i}{\hbar} \alpha \vec{n} \cdot \vec{L}} \psi_m(\vec{r}) \right]$$

$$= \left[ U_L \psi(\vec{r}) \right]^\dagger \left[ U_L \psi(\vec{r}) \right]$$

wobei  $U_L = U_L(\alpha, \vec{n}) = e^{-\frac{i}{\hbar} \alpha \vec{n} \cdot \vec{L}}$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{U}_R = \hat{U}_S \hat{U}_L}$$

Ansatz:  $\hat{U}_S = \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \alpha \vec{n} \cdot \vec{\sigma} \right\}$

$$\text{aus (ii)} \quad U_{S(\alpha, \vec{n})}^\dagger \vec{G}_i U_{S(\alpha, \vec{n})} = R_{ij}^{-1} \vec{G}_j = R_{ji} \vec{G}_j$$

für infinitesimale Drehung

$$\vec{r}' = \vec{r} + \delta\alpha \vec{n} \times \vec{r}$$

$$x_i' = x_i + \varepsilon_{ijk} n_j x_k \delta\alpha$$

$$= R_{ik} x_k$$

$$R_{ik} = \delta_{ik} + \varepsilon_{ijk} n_j \delta\alpha$$

$$\text{mit} \quad R_{ij} \hat{U}_{S(\delta\alpha, \vec{n})}^\dagger \vec{G}_i \hat{U}_{S(\delta\alpha, \vec{n})} = \vec{G}_j$$

$$\text{und} \quad \hat{U}_{S(\delta\alpha, \vec{n})} = \left(1 - \frac{i}{\hbar} \delta\alpha \vec{n} \cdot \vec{\hat{a}}\right)$$

$$\Rightarrow \hat{\vec{G}}_j = \left(\delta_{ij} + \varepsilon_{ikj} n_k \delta\alpha\right) \left(1 + \frac{i}{\hbar} \delta\alpha \vec{n} \cdot \vec{\hat{a}}\right) \vec{G}_i \left(1 - \frac{i}{\hbar} \delta\alpha \vec{n} \cdot \vec{\hat{a}}\right)$$

$$= \left(\delta_{ij} + \varepsilon_{ikj} \delta\alpha n_k\right) \left(\vec{G}_i + \frac{i}{\hbar} \delta\alpha n_k [\hat{a}_k, \vec{G}_i]\right)$$

$$= \vec{G}_j + \varepsilon_{ikj} \delta\alpha n_k \vec{G}_i + \frac{i}{\hbar} \delta\alpha n_k [\hat{a}_k, \vec{G}_j] + \mathcal{O}(\delta\alpha^2)$$

$$\Rightarrow [\hat{a}_k, \vec{G}_j] = i\hbar \varepsilon_{ikj} \vec{G}_i$$

man bildet  $\{1, \hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z\}$  vollständige Basis der  $2 \times 2$  Matrizen  $\Rightarrow$

$$\hat{a}_k = \alpha_{km} \hat{\sigma}_m + \beta_k \mathbb{1}_2$$

O.B.d.A.  $\beta_k = 0$

$$\Rightarrow \alpha_{km} [\hat{\sigma}_m, \hat{\sigma}_j] = i\hbar \epsilon_{kji} \hat{\sigma}_i$$

mit  $[\hat{\sigma}_m, \hat{\sigma}_j] = 2i\hbar \epsilon_{mjn} \hat{\sigma}_n$

$$\Rightarrow 2\alpha_{km} \epsilon_{mjn} \hat{\sigma}_n = i\hbar \epsilon_{kjin} \hat{\sigma}_n$$

$$\alpha_{km} = \frac{i\hbar}{2} \delta_{km}$$

$$\hat{U}_S(\alpha, \vec{n}) = \exp \left\{ -\frac{i}{2} \alpha \vec{n} \cdot \vec{\sigma} \right\}$$

Drehung insgesamt

$$\hat{U}_R = \hat{U}_S \hat{U}_L = \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \alpha \vec{n} \cdot \left( \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma} + \vec{L} \right) \right\}$$

$$\begin{aligned} \hat{U}_R &= \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \alpha \vec{n} \cdot (\vec{L} + \vec{S}) \right\} \\ &= \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \alpha \vec{n} \cdot \vec{J} \right\} \end{aligned}$$

## V. 4. Drehimpulsalgebra

Def: Jeder Vektoroperator  $\vec{J}$  dessen Komponenten den Vertauschungsrelationen

$$[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} \hat{J}_k$$

genügt, ist ein Drehimpuls. (Lie-Algebra der  $SO(3)$ )

Casimiroperator  $\hat{J}^2 = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2$

$$[\hat{J}_i, \hat{J}^2] = 0$$

Leiteroperatoren  $\hat{J}_{\pm} = \hat{J}_x \pm i \hat{J}_y$

$$[\hat{J}_z, \hat{J}_{\pm}] = \pm \hbar \hat{J}_{\pm} \quad [\hat{J}_+, \hat{J}_-] = 2\hbar \hat{J}_z$$

Die Eigenwerte und Eigenzustände von Drehimpulsoperatoren sind vollständig durch die Vertauschungsregeln festgelegt:

Man findet mit ( $\hbar=1$ )

$$\hat{J}^2 = \frac{1}{2} (\hat{J}_+ \hat{J}_- + \hat{J}_- \hat{J}_+) + \hat{J}_z^2$$

und

$$\hat{J}_+ \hat{J}_- = \hat{J}^2 - \hat{J}_z (\hat{J}_z - 1)$$

$$\hat{J}_- \hat{J}_+ = \hat{J}^2 - \hat{J}_z (\hat{J}_z + 1)$$

$$\hat{J}^2 |j, m\rangle = j(j+1) |j, m\rangle \quad (n=1)$$

$$\hat{J}_z |j, m\rangle = m |j, m\rangle$$

$$(*) \quad \hat{J}_+ |j, m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} |j, m+1\rangle$$

$$(**) \quad \hat{J}_- |j, m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m-1)} |j, m-1\rangle$$

Matrixdarstellung von Drehimpulsoperatoren

$$\hat{J}_x = \frac{1}{2} (\hat{J}_+ + \hat{J}_-)$$

$$\hat{J}_y = \frac{1}{2i} (\hat{J}_+ - \hat{J}_-)$$

$$\boxed{j = \frac{1}{2}} \quad \text{mit } (*), (**)$$

$$(\hat{J}_x)_{mn} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \hat{\sigma}_x$$

$$(\hat{J}_y)_{mn} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \hat{\sigma}_y$$

$$(\hat{J}_z)_{mn} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \hat{\sigma}_z$$

$$\boxed{j = 1}$$

$$(\hat{J}_x)_{mn} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\hat{J}_y)_{mn} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$



$$(\hat{J}_z)_{mn} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(\hat{J}^2)_{mn} = 1(1+1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

•  $j = \frac{3}{2}$

$$(\hat{J}_x)_{mn} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\hat{J}_y)_{mn} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i\sqrt{3} & 0 & 0 \\ i\sqrt{3} & 0 & -2i & 0 \\ 0 & 2i & 0 & -i\sqrt{3} \\ 0 & 0 & i\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\hat{J}_z)_{mn} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

etc.

Wir sehen

$$\hat{U} = e^{-i\alpha \vec{n} \cdot \vec{J}}$$

$$= \begin{pmatrix} U_0 & & & \\ & U_2 & & \\ & & U_3 & \\ & 0 & & \end{pmatrix} \begin{matrix} j=0 \\ j=\frac{1}{2} \\ j=1 \end{matrix}$$

Die Elemente  $\hat{U}$  der Lie Gruppe lassen sich durch Matrizen auf invarianten Unterräumen abbilden

Def: Ist  $U$  eine kont. Gruppe (Lie Gruppe) unitärer Operatoren auf einem separablen Hilbertraum  $\mathcal{H}$  so heißt die Matrixdarstellung von  $U$  auf  $\mathcal{H}$  reduzibel falls invariante Unterräume existieren. Andernfalls heißt die Matrixdarstellung irreduzibel.

die oben gefundenen Darstellungen der  $SO(3)$  sind offensichtlich irreduzibel.

#### IV. 5. Addition von Drehimpulsen

seien  $\hat{J}_1$  und  $\hat{J}_2$  Drehimpulse, dann erfüllt ebenfalls

$$\hat{J} = \hat{J}_1 + \hat{J}_2$$

die Lie-Algebra der Drehimpulse falls  $[\hat{J}_1, \hat{J}_2] = 0$

$$[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = [\hat{J}_{1i} + \hat{J}_{2i}, \hat{J}_{1j} + \hat{J}_{2j}]$$

$$= [\hat{J}_{1i}, \hat{J}_{1j}] + [\hat{J}_{2i}, \hat{J}_{2j}]$$

$$= i \varepsilon_{ijn} \hat{J}_{1n} + i \varepsilon_{ijn} \hat{J}_{2n} = i \varepsilon_{ijn} \hat{J}_n$$

□

Seien  $\vec{J}_1$  irreduzible Darstellung der  $SO(3)$  auf  $\mathbb{C}^{2j_1+1}$  und  $\vec{J}_2$  auf  $\mathbb{C}^{2j_2+1}$ , dann wirkt  $\vec{J}_1 + \vec{J}_2$  auf  $\mathbb{C}^{2j_1+1} \otimes \mathbb{C}^{2j_2+1}$ . Ein vollständiger Satz von Basisvektoren ist

$$|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle = |j_1, m_1; j_2, m_2\rangle$$

$\mathbb{C}^{2j_1+1} \otimes \mathbb{C}^{2j_2+1}$  ist von der Dimension  $(2j_1+1)(2j_2+1)$ .

Dieser Raum kann in invariante Unterräume  $V_J$  mit

$$|j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2$$

$$j_1 + j_2 - J \text{ ganzzahlig}$$

zerlegt werden

$$\mathbb{C}^{2j_1+1} \otimes \mathbb{C}^{2j_2+1} = \bigoplus_{J=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} V_J$$

wobei  $\dim(V_J) = 2J+1$ , D.B.d.A.  $j_1 \geq j_2$

$$\sum_{J=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} 2J+1 =$$

$$= \frac{(j_1+j_2) - (j_1-j_2) + 1}{2} [2(j_1+j_2) + 2(j_1-j_2) + 2]$$

$$= (j_1+j_2+1)(2j_2+1)$$

$$= (j_1+j_2+1)(2j_2+1) = (j_1+j_2+1)(2j_1+1)$$

$V_J$

Eigenwert des Casimir Operators  $\hat{J}^2 : J(J+1)$   
( $\hbar=1$ )

Satz kommutierender Operatoren

$$\{\hat{J}^2, \hat{J}_z, \hat{J}_1^2, \hat{J}_2^2\}$$

Konstruktion der Basisvektoren in  $V_J$  : ( $\hbar=1$ )

$$\hat{J}_z |j_1, m_1; j_2, m_2\rangle = (m_1 + m_2) |j_1, m_1; j_2, m_2\rangle$$

(a) maximale EW

$$M = m_1 + m_2 = j_1 + j_2$$

muß zu

$$J = j_1 + j_2$$

gehören

$$\hat{J}_z |j_1, j_1; j_2, j_2\rangle = \underbrace{(j_1 + j_2)}_M |j_1, j_1; j_2, j_2\rangle$$

$$\hat{J}^2 |j_1, j_1; j_2, j_2\rangle = \underbrace{(j_1 + j_2)(j_1 + j_2 + 1)}_J |j_1, j_1; j_2, j_2\rangle$$

$$\boxed{|J=j_1+j_2, M=J, j_1, j_2\rangle = |j_1, j_1; j_2, j_2\rangle}$$

Subsequente Anwendung der Ladderoperatoren  $J_{\pm}$  liefert alle anderen Basiszustände

$$\hat{J}_{\pm} |J, M\rangle = \sqrt{(J \mp M + 1)(J \mp M)} |J, M \pm 1\rangle$$

$$|J=j_1+j_2, M=J\rangle = |j_1, j_1; j_2, j_2\rangle$$

$$|J=j_1+j_2, M=J-1\rangle = [2(j_1+j_2)]^{-1/2} \hat{J}_- |j_1+j_2, j_1+j_2\rangle$$

$$= [2(j_1+j_2)]^{-1/2} (\hat{J}_{1-} + \hat{J}_{2-}) |j_1, j_1, j_2, j_2\rangle$$

$$(*) \quad = \sqrt{\frac{j_1}{j_1+j_2}} |j_1, j_1-1, j_2, j_2\rangle + \sqrt{\frac{j_2}{j_1+j_2}} |j_1, j_1, j_2, j_2-1\rangle$$

(b) orthogonales Komplement zu  $V_{J=j_1+j_2}$

nächstgrößter Eigenwert  $M = j_1 + j_2 - 1$

$$\text{z.B.} \quad \left\{ |j_1, j_1-1, j_2, j_2\rangle, |j_1, j_1, j_2, j_2-1\rangle \right\}$$

zu (\*): orthogonale Linearkombinationen

$$|\varphi\rangle = -\sqrt{\frac{j_2}{j_1+j_2}} |j_1, j_1-1, j_2, j_2\rangle + \sqrt{\frac{j_1}{j_1+j_2}} |j_1, j_1, j_2, j_2-1\rangle$$

$$\hat{J}_+ |\varphi\rangle = \hat{J}_{1+} |\varphi\rangle + \hat{J}_{2+} |\varphi\rangle$$

$$= -\sqrt{\frac{j_2}{j_1+j_2}} \sqrt{(j_1+j_1)(j_1-j_1+1)} |j_1, j_1, j_2, j_2\rangle$$

$$+ \sqrt{\frac{j_1}{j_1+j_2}} \sqrt{(j_2+j_2)(j_2-j_2+1)} |j_1, j_1, j_2, j_2\rangle = 0$$

$$\hat{J}_z |\varphi\rangle = (\hat{J}_{z1} + \hat{J}_{z2}) |\varphi\rangle = (j_1 + j_2 - 1) |\varphi\rangle$$

$$\Rightarrow -1/2 J = j_1 + j_2 - 1 \quad |M = J\rangle$$

$$|J = j_1 + j_2 - 1, M = J, j_1 j_2\rangle = -\sqrt{\frac{j_2}{j_1 + j_2}} |j_1, j_1 - 1; j_2, j_2\rangle + \sqrt{\frac{j_1}{j_1 + j_2}} |j_1, j_1; j_2, j_2 - 1\rangle$$

Anwendung von  $\hat{J}_-$  erzeugt Zustände mit  $M = J - 1, J - 2, \dots$

allg.:

$$|J, M\rangle = \sum_{m_1 m_2} \langle j_1, m_1; j_2, m_2 | JM \rangle |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$$

$$|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = \sum_{J=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \sum_M \langle J, M | j_1 m_1 j_2 m_2 \rangle |J, M\rangle$$

$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | JM \rangle$  Clebsch - Gordan  
Koeffizienten

können sehr reell gewählt werden

Bem: Es existieren analytische Formeln für die Clebsch-Gordan Koeffizienten, diese sind aber sehr unübersichtlich

die Clebsch Gordon Koeffizienten lassen sich durch eine reelle orthogonale  $(2j_1+1)(2j_2+1) \times (2j_1+1)(2j_2+1)$  Matrix

$$C(m_1, m_2; J, M)$$

darstellen

$C$  ist blockdiagonal, jeder Block ist durch einen Wert

$M = m_1 + m_2$  charakterisiert

$$M = m_{\max} = j_1 + j_2$$

$$\text{wobei } J = j_1 + j_2 \quad M = j_1 + j_2$$

$$\text{und } m_1 = j_1 \quad m_2 = j_2$$

1x1 Untermatrix

$$M = m_{\max} - 1 = j_1 + j_2 - 1$$

$$\left. \begin{array}{l} J = j_1 + j_2 \\ J = j_1 + j_2 - 1 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 = j_1 ; m_2 = j_2 - 1 \\ m_1 = j_1 - 1 ; m_2 = j_2 \end{array} \right.$$

2x2 Untermatrix

$$M = m_{\max} - 2 = j_1 + j_2 - 2$$

$$\left. \begin{array}{l} J = j_1 + j_2 \\ J = j_1 + j_2 - 1 \\ J = j_1 + j_2 - 2 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 = j_1 \quad m_2 = j_2 - 2 \\ m_1 = j_1 - 1 \quad m_2 = j_2 - 1 \\ m_1 = j_1 - 2 \quad m_2 = j_2 \end{array} \right.$$

3x3 Untermatrix

Dimension der Untervektoren wächst bis zu bestimmtem  $M$  in Schritten und nimmt dann wieder in Schritten bis 1 ab.

Rekursionsformeln für Clebsch-Gordan's:

Anwendung von  $J_+$   $\Rightarrow \dots \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \sqrt{J(J+1) - M(M+1)} \langle m_1, m_2 | JM+1 \rangle &= \\ &= \sqrt{j_1(j_1+1) - m_1(m_1+1)} \langle m_1+1, m_2 | JM \rangle \\ &+ \sqrt{j_2(j_2+1) - m_2(m_2+1)} \langle m_1, m_2+1 | JM \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{J(J+1) - M(M-1)} \langle m_1, m_2 | JM-1 \rangle &= \\ &= \sqrt{j_1(j_1+1) - m_1(m_1-1)} \langle m_1+1, m_2 | JM \rangle \\ &+ \sqrt{j_2(j_2+1) - m_2(m_2-1)} \langle m_1, m_2+1 | JM \rangle \end{aligned}$$

rekursive Konstruktion der Clebsch-Gordan Matrix

$M = j_1 + j_2$  klar

$j_1, j_2, m_1, m_2 \rightarrow j_1, j_2, m_1, m_2$

$j_1, j_2, m_1, m_2$



$$\underline{M = j_1 + j_2 - 1}$$

$$\bullet J = j_1 + j_2 \quad \text{Rekursion (*)}$$

$$\langle m_1, m_2 | J, M-1 \rangle \leftrightarrow \langle m_1+1, m_2 | J, M \rangle$$

und  $\langle m_1, m_2+1 | J, M \rangle$

$$\bullet J = j_1 + j_2 - 1$$

Basis:  $|m_1+1, m_2\rangle, |m_1, m_2+1\rangle$   
+ Orthogonalität

$$\langle J = j_1 + j_2, M = j_1 + j_2 - 1 | J = j_1 + j_2 - 1, M = j_1 + j_2 - 1 \rangle = 0$$

$$\underline{M = j_1 + j_2 - 2}$$

$$\bullet J = j_1 + j_2 \quad \text{Rekursionsformel (*)}$$

$$\langle m_1, m_2 | J, M-2 \rangle \leftrightarrow \langle m_1+1, m_2 | J, M-1 \rangle$$

und  $\langle m_1, m_2+1 | J, M-1 \rangle$

$$\bullet J = j_1 + j_2 - 1 \quad \text{Rekursionsformel (*)}$$

$$\langle m_1, m_2 | J = j_1 + j_2 - 1, M = j_1 + j_2 - 2 \rangle$$

$$\leftrightarrow \langle m_1+1, m_2 | J = j_1 + j_2 - 1, M = j_1 + j_2 - 3 \rangle$$

und  $\langle m_1, m_2+1 | J = j_1 + j_2 - 1, M = j_1 + j_2 - 3 \rangle$

$$\bullet J = j_1 + j_2 - 2 \quad \text{Orthogonalität etc.}$$

$$J = j_1 + j_2 - 2$$

Orthogonalität

etc.

## IV 6. Skalar - Vektor und Tensoroperatoren Wigner - Eckart Theorem

⇒ Mahes elemente dreihinvarianter Observabler?

$\hat{S}$  skalarer, dreihinvarianter Operator

$$[\hat{J}, \hat{S}] = 0$$

Basis  $\{|\alpha, J, M\rangle\}$   $\alpha$  dreihinvariante EW  
 $J, M$  Drehimpulseigenwerte

$|\alpha, J, M\rangle$  EV zu  $\hat{J}^2, \hat{J}_z$  mit EW  $J, M$   
 $\hat{S}|\alpha, J, M\rangle$  ebenfalls EV zu  $\hat{J}^2, \hat{J}_z$  EW  $J', M'$

⇒

$$(i) \quad \langle \alpha, J, M | \hat{S} | \alpha', J', M' \rangle = 0 \quad \text{für } J \neq J' \text{ oder } M \neq M'$$

$$\langle \alpha, J, M | \hat{S} | \alpha', J, M \rangle = [J(J+1) - M(M-1)]^{-1/2}$$

$$= [J(J+1) - M(M-1)]^{-1/2} \langle \alpha, J, M | \hat{S} \hat{J}_+ | \alpha', J, M-1 \rangle$$

$$= [J(J+1) - M(M-1)]^{-1/2} \langle \alpha, J, M | \hat{J}_+ \hat{S} | \alpha', J, M-1 \rangle$$

$$= \langle \alpha, J, M-1 | \hat{S} | \alpha', J, M-1 \rangle$$

d.h. (ii)  $\langle \alpha, J, M | \hat{S} | \alpha', J, M \rangle$  ist unabh. von  $M$ !

$$\langle \alpha, J, M | \hat{S} | \alpha', J', M' \rangle = \delta_{JJ'} \delta_{MM'} S_{\alpha\alpha'}^{(J)}$$

### Verallgemeinerung auf Vektor- bzw. Tensoroperatoren

Vektoren und Tensoren bleiben bei Drehungen nicht mehr invariant, aber ihre Komponenten transformieren sich wie die Koordinaten

$$\vec{y} = R(\vec{n}, \alpha) \vec{x}$$

$$y_k = R_{kn} x_n$$

Tensor

$$T_{i'k'} = R_{i'i} R_{k'n} T_{ik} \quad \text{etc.}$$

Def: Ein Tensor  $T_{ij\ldots}$  heißt irreduzibel wenn der Raum in dem er definiert ist bzgl. Drehungen irreduzibel ist, d.h. nicht mehr in invariante Unterräume zerlegbar ist

Bspl: • Vektoren des  $\mathbb{R}^3$ , Spinoren sind irreduzibel

•  $(V \otimes W)_{ij}$  ist dagegen reduzibel

Def: Die  $(2k+1)$  Operatoren  $\hat{T}_q^{(k)}$   $q = -k, -k+1, \dots, k$  heißen Standardkomponenten des irreduziblen Tensoroperators  $\hat{T}^{(k)}$  wenn sie sich bei Drehungen gemäß

$$(*) \quad \hat{T}_q^{(k)} \rightarrow R \hat{T}_q^{(k)} R^{-1} = \sum_{q'} R_{q'q}^{(k)} \hat{T}_{q'}^{(k)}$$

transformieren, d.h. wie die Basisvektoren

$$|k, q\rangle \rightarrow R |k, q\rangle = \sum_{q'} R_{q'q}^{(k)} |k, q'\rangle$$

Bem: (\*) ist äquivalent zu  $(h=1)$

$$[\hat{J}_\pm, \hat{T}_q^{(k)}] = \sqrt{k(k+1) - q(q\pm 1)} \hat{T}_{q\pm 1}^{(k)}$$

$$[\hat{J}_z, \hat{T}_q^{(k)}] = q \hat{T}_q^{(k)}$$

Satz: Wigner-Eckart Theorem

Die Matrixelemente irreduzibler Tensoroperatoren  $\hat{T}_q^{(k)}$  ergeben sich aus

$$\langle \alpha, J, M | \hat{T}_q^{(k)} | \alpha', J', M' \rangle = \frac{1}{\sqrt{2J+1}} \langle \alpha, J || \hat{T}_q^{(k)} || \alpha', J' \rangle \langle J' M' k q | J M \rangle$$

hier sind  $\langle \alpha J || \hat{T}_q^{(k)} || \alpha' J' \rangle$  Größen die nur von  $\alpha, \alpha', J, J'$  abhängen und  $\langle J' M' k q | J M \rangle$  sind die Clebsch-Gordan Koeffizienten.

Beweis: nicht schwierig, siehe z.B. Messiah  
Quantenmechanik Band 2

Folgerungen: Auswahlregeln

$$\langle \alpha, J, M | \hat{T}_q^{(k)} | \alpha', J', M' \rangle \neq 0$$

$$\Leftrightarrow q = M - M', \quad |J - J'| \leq k \leq J + J'$$

———— Ende ————