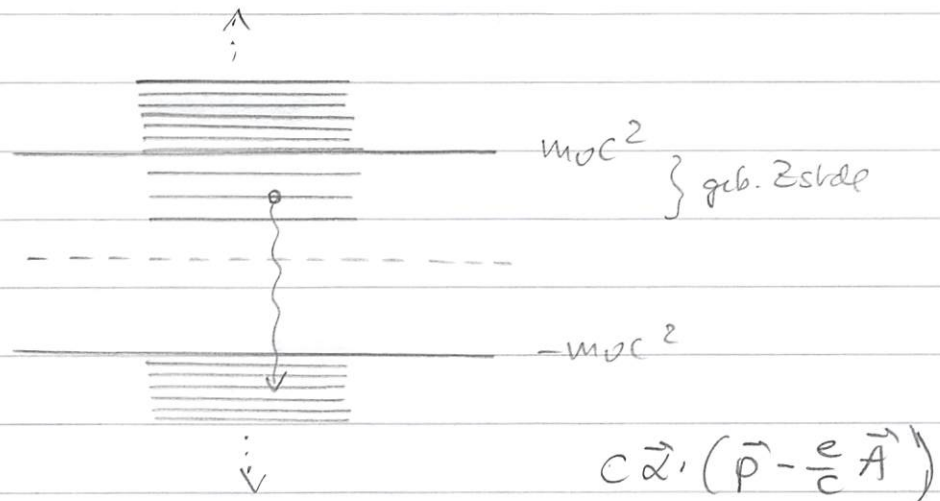


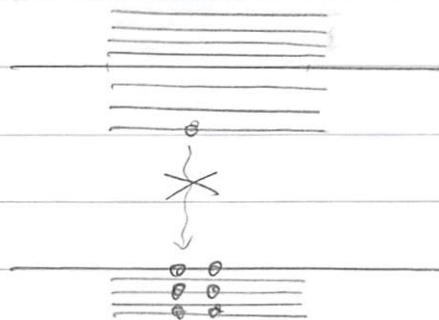
IV. 9. Löchertheorie

Problem: negative Energielösungen der Dirac-Theorie
 $\Rightarrow$ Strahlungskatastrophe



bei Einschalten der WW mit dem elektr. Feld spontane Emission und Übergang in Zust. negative Energie

Lösung: Vielteilchenmodell, Zustände negativer Energie sind alle besetzt Dirac see
Pauliverbot verhindert Strahlungskatastrophe



Vakuumzustand: keine Teilchen in Zust. positiver Energie

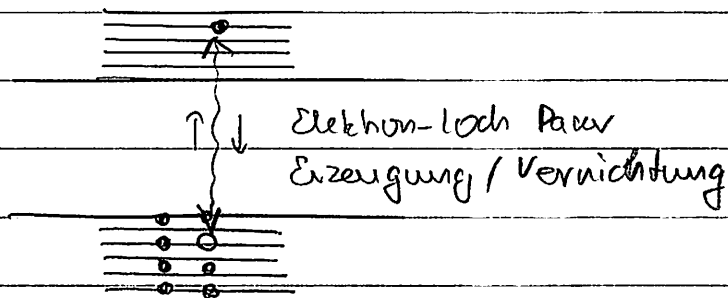
Konsequenzen des Modells des Dirac-See

- Photonen der Energie $\hbar\omega > 2m_0c^2$ können vom Vakuum absorbiert werden;

Erzeugung eines Elektron-Loch Paares

Loch = Antiteilchen $q = +|e|$

- Übergang eines Elektrons in unbesetzten Lochzustand: Paarvernichtung + Photon $\hbar\omega \geq 2m_0c^2$



$$\begin{aligned}\hbar\omega &= E_{\text{pos. Energie}} - E_{\text{neg. Energie}} \\ &= c \sqrt{\vec{p}^2 + m_0c^2} - (-\sqrt{\vec{p}^2 + m_0c^2})\end{aligned}$$

$$= E_{\text{Elektron}} + E_{\text{Positron}}$$

$$E_{\text{Positron}} = + \sqrt{\vec{p}^2 + m_0c^2}$$

Loch $\hat{=}$ Antiteilchen mit positiver Energie

$$\hbar\vec{k} \neq \vec{p}_{\text{neg. E}} = \vec{p}_{\text{pos. E}}$$

$$\begin{aligned}\hbar\vec{k} &= \vec{p}_{\text{pos. E}} - \vec{p}_{\text{neg. E}} \\ &= \hbar\vec{k} =\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{p}_{\text{Position}} = - \vec{p}_{\text{neg-Energie}}}$$

$$\hbar \vec{k} = \vec{p}_{\text{Elektron}} + \vec{p}_{\text{Position}}$$

zur Erinnerung: wahrer Geschwindigkeitsoperator

$$\left[\frac{d\vec{x}}{dt} \right] = c \left[\vec{\alpha} \right] = \frac{c^2 \vec{p} \hat{\Lambda}}{c \sqrt{\vec{p}^2 + m_0^2 c^2}}$$

bei neg. Energielösungen $\left[\frac{d\vec{x}}{dt} \right] \sim -c \vec{p}$

$$\hat{=} \text{Loch mit } \vec{p} \hat{=} \text{Position mit } -\vec{p}$$

• Vakuumpolarisation:

Vakuum ist polarisierbar durch elm. Felder

Lochtheorie ist Vielteilchentheorie, Einteilchenwahrscheinlichkeitsinterpretation der Dirac-Theorie muß fallen gelassen werden

konsequente Erweiterung: Quantenelektrodynamik

$$\psi_k(\vec{r}, t) \rightarrow \hat{\Psi}(\vec{r}, t) = \sum_n \hat{c}_n \psi_n(\vec{r}, t) + \hat{c}_n^\dagger \bar{\psi}_n(\vec{r}, t)$$

$$\{ \hat{c}_n, \hat{c}_{n'}^\dagger \} = \delta_{nn'}$$

(A) Ladungskonfiguration

neue Symmetrie

Teilchen Ladung $q \longleftrightarrow$ Antiteilchen Ladung $-q$

$$(i\hbar \not{\partial} - \frac{e}{c} \not{A} - m_0 c) \psi = 0 \quad \text{Elektron}$$

$$(i\hbar \not{\partial} + \frac{e}{c} \not{A} - m_0 c) \psi_c = 0 \quad \text{Positron (pos. Energielösung!)}$$

$$\psi_c \stackrel{?}{\longleftrightarrow} \psi \quad \psi_c = \hat{U} \psi$$

was ist

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)^* = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad \text{denn } A_\mu^* = A_\mu$$

d.h.

$$\begin{aligned} & \left[(i\hbar \not{\partial} - \frac{e}{c} \not{A} - m_0 c) \psi \right]^* \\ &= \left[\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{e}{c} A_\mu \right) \gamma^\mu \psi - m_0 c \psi \right]^* = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left[\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{e}{c} A_\mu \right) \gamma^{\mu*} + m_0 c \right] \psi^* = 0$$

wir suchen $\hat{U} = C \gamma^0$

mit $U \gamma^{\mu*} U^{-1} = -\gamma^\mu$

$$\left[\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{e}{c} A_\mu \right) U \gamma^{\mu*} U^{-1} + m_0 c \right] U \psi^* = 0$$

bzw
$$\left[\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{e}{c} A_\mu \right) \gamma^\mu - m_0 c \right] U \psi^* = 0$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\psi_c = U \psi^* = C \gamma^0 \psi^* = C \bar{\psi}^T}$$

Wiederum, $\bar{\psi}^T = (\psi^\dagger \gamma^0)^T = \gamma^{0T} \psi^{\dagger T} = \gamma^0 \psi^*$

Bestimmung von C :

$\hookrightarrow -\gamma^\mu = U \gamma^{\mu*} U^{-1} = C \gamma^0 \gamma^{\mu*} (C \gamma^0)^{-1} = C \gamma^0 \gamma^{\mu*} \gamma^0 C^{-1}$

was gilt für

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\gamma^0 \gamma^{\mu*} \gamma^0 = \gamma^{\mu T}}$$

denn
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} = \gamma^{iT}$$

d.h.

$$-\gamma^{\mu T} = (C^{-1})^T \gamma^\mu C^T$$

da $\gamma^{1T} = -\gamma^1 \quad \gamma^{2T} = \gamma^2 \quad \gamma^{3T} = -\gamma^3 \quad \gamma^{0T} = \gamma^0$

muß $[C^T, \gamma^1] = [C^T, \gamma^3] = 0$ und $\{C^T, \gamma^0\} = \{C^T, \gamma^2\} = 0$

$$\Rightarrow \boxed{C = i\gamma^2 \gamma^0 = -C^{-1} = -C^\dagger = -C^T}$$

und

$$\psi_c = C\psi = C\gamma^0 K\psi = C\gamma^0 \psi^*$$

$$\boxed{\psi_c = C\bar{\psi}^T = i\gamma^2 \psi^* = i\gamma^2 K\psi}$$

ψ und ψ_c heißen zueinander ladungskonjugiert

es gilt natürlich

$$(\psi_c)_c = (i\gamma^2 \psi^*)_c = i\gamma^2 (i\gamma^2 \psi)^*$$

$$= \gamma^2 \gamma^{2*} \psi = \gamma^2 \gamma^0 \gamma^{2T} \gamma^0 \psi$$

$$= \gamma^2 \gamma^0 \gamma^2 \gamma^0 \psi = -\gamma^2 \gamma^2 \gamma^0 \gamma^0 \psi$$

$$= \psi \quad \square$$

Schneller: $\gamma^{2*} = -\gamma^2$

Erwartungswerte im ladungskonjugierten Zustand

$$\langle \hat{O} \rangle_c = \langle \psi_c | \hat{O} | \psi_c \rangle = \int d^3\vec{r} \psi_c^\dagger \hat{O} \psi_c$$

$$= \int d^3\vec{r} (i\gamma^2 \psi^*)^\dagger \hat{O} (i\gamma^2 \psi^*)$$

$$= \int d^3\vec{r} \psi^{*+} \gamma^{2+} \hat{O} \gamma^2 \psi^* = \int d^3\vec{r} \psi^{*+} \gamma^0 \gamma^2 \gamma^0 \hat{O} \gamma^2 \psi^*$$

$$= - \int d^3\vec{r} \psi^{*+} \gamma^2 \hat{O} \gamma^2 \psi^* = - \left(\int d^3\vec{r} \psi^\dagger \gamma^2 \hat{O} \gamma^2 \psi \right)^* = -177 =$$

$$= -\langle \psi | \gamma^{2*} \hat{O}^* \gamma^{2*} | \psi \rangle^* = -\langle \psi | \gamma^2 \hat{O}^* \gamma^2 | \psi \rangle^* \quad \gamma^{2*} = -\gamma^2$$

Bsple:

$$\langle \beta \rangle_c = -\langle \beta \rangle$$

$$\langle \alpha_i \rangle_c = \langle \alpha_i \rangle$$

$$\langle \vec{x} \rangle_c = \langle \vec{x} \rangle$$

$$\langle \vec{p} \rangle_c = -\langle \vec{p} \rangle$$

$$\langle \vec{s} \rangle_c = -\langle \vec{s} \rangle$$

$$\langle \vec{L} \rangle_c = -\langle \vec{L} \rangle$$

$$\langle \vec{J} \rangle_c = -\langle \vec{J} \rangle$$

$$\langle \hat{H}(e) \rangle_c = -\langle \hat{H}(-e) \rangle$$

Ladungskonjugation von Zuständen beliebigen Spins und Impuls

► Projektionsoperator für Energie

Erinnerung: $(\not{p} - \epsilon_r m_0 c) \psi(\vec{p}) = 0$

$$\epsilon_r = +1 \quad \text{pos. Energie} \quad \epsilon_r = -1 \quad \text{neg. Energie}$$

► Projektor zu gegebenen 4-Impuls p^μ

$$\hat{\Lambda}_\pm(p) = \frac{\pm \not{p} + m_0 c}{2m_0 c}$$

$$\hat{L}_+^2 = \hat{L}_+ \quad \hat{L}_-^2 = \hat{L}_- \quad \hat{L}_+ \hat{L}_- = 0$$

$$\hat{L}_+ + \hat{L}_- = \mathbb{1}$$

► Projektionsoperator für Spin

nichtrelativistisch $\hat{P}(\vec{u}) = \frac{1 + \vec{u} \cdot \vec{\sigma}}{2} \quad |\vec{u}| = 1$

relativistisch? zunächst $\vec{u} = \vec{e}_z$

$$u_z^\nu \big|_{\text{Ruhesystem}} = (0, 0, 0, 1)$$

LTrab

$$u_z^\nu = a_\mu^\nu u_z^\mu \big|_{rs} = a_3^\nu$$

$$\hat{\Sigma}(u_z) = \frac{1 + \gamma_5 \gamma_3}{2}$$

denn

$$\gamma_5 \gamma_z = \gamma_5 \gamma_\mu u_z^\mu \big|_{\text{Ruhesystem}} = \gamma_5 \gamma_3$$

$$= i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma_3 = -i \gamma^0 \gamma^1 \underbrace{\gamma^2 \gamma^3}_{-1}$$

$$= i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & -\sigma_z \end{pmatrix}$$

Bem.: Wahl des negativen Vorzeichens bei unteren Spinorkomponenten wie in II.7.8

Verallgemeinerung

$$\hat{\Sigma}(s) = \frac{1 + \gamma_5 \not{s}}{2}$$

es gilt

$$[\hat{\Sigma}(s), \hat{\mathcal{L}}_{\pm}(p)] = 0$$

d.h. gleichzeitige Projektion auf pos./neg. Energie
und Spinpolarisation möglich

d.h. sein ψ ebene Welle mit Impuls $\vec{p}$

$$\begin{aligned} \psi_{\epsilon, p, s} &= \hat{\mathcal{L}}_{\epsilon}(p) \hat{\Sigma}(s) \psi \\ &= \left(\frac{\epsilon \not{p} + m_0 c}{2m_0 c} \right) \left(\frac{1 + \gamma_5 \not{s}}{2} \right) \psi \end{aligned}$$

Ladungskonjugation?

es gilt $[C, \gamma_5] = [i\gamma^2\gamma^0, i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3] = 0$

$$\gamma_5^T = (i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3)^T = i\gamma^{3T}\gamma^{2T}\gamma^{1T}\gamma^{0T}$$

$$= i(-\gamma^3)\gamma^2(-\gamma^1)\gamma^0 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \gamma_5$$

$$= \gamma_5^*$$

$$(\psi_{\epsilon, p, s})_c = \hat{C} \overline{\psi}_{\epsilon p s}^T = \hat{C} \gamma^0 \psi_{\epsilon p s}^*$$

174 =

$$= C \gamma^0 \left(\frac{\cancel{E} \not{\vec{p}} + m_0 c}{2m_0 c} \right)^* \left(\frac{1 + \cancel{\gamma}_5 \not{A}}{2} \right)^* \psi^*$$

$$(C \gamma^0)^{-1} \underbrace{C \gamma^0 \psi^*}_{\psi_c}$$

es gilt

$$C \gamma^0 \gamma^\mu{}^* (C \gamma^0)^{-1} = -\gamma^\mu \quad (S. 141)$$

$$\gamma^0 \gamma_5 \gamma^0 = -\gamma_5$$

$$\Rightarrow \boxed{(\psi_{E,p,s})_c = \left(\frac{-\cancel{E} \not{\vec{p}} + m_0 c}{2m_0 c} \right) \left(\frac{1 + \cancel{\gamma}_5 \not{A}}{2} \right) \psi_c}$$

Ladungskonjugation hat dieselbe Spinprojektion
aber umgekehrte Energie und Impuls

(B) Zeitumkehr und PCT-Symmetrie

• Paritätstransformation

$$\boxed{\hat{P} \psi = e^{i\varphi} \gamma^0 \psi}$$

$$\hat{P} (\not{\vec{p}} - \frac{e}{c} \not{A} - m_0 c) \psi = 0$$

$$\hat{P} (\hat{p}_0 \gamma^0 + \hat{p}_i \gamma^i - \frac{e}{c} A_0 \gamma^0 - \frac{e}{c} A_i (\vec{r} \pm) \gamma^i - m_0 c) \hat{P}^{-1} \hat{P} \psi = 0$$

mit $\hat{P} \vec{x} \hat{P}^{-1} = -\vec{x}$ $\hat{P} \vec{p} \hat{P}^{-1} = -\vec{p}$

$\hat{P} A_0 \hat{P}^{-1} = A_0$ $\hat{P} \vec{A} \hat{P}^{-1} = -\vec{A}$

→

$$\left[\hat{P}_0 \gamma^0 + (-\hat{P}_i)(-\gamma^i) - \frac{e}{c} A_0 \gamma^0 - \frac{e}{c} (-A_i)(-\gamma^i) - m_0 c \right]$$

$$\hat{P} \psi = 0$$

$$(\not{P} - \frac{e}{c} \not{A} - m_0 c) \hat{P} \psi = 0$$

$\hat{P}$ löst Diracgleichung invariant

• Zeitumkehr

$$\psi'(\vec{r}, t') = \hat{T} \psi(\vec{r}, t) = \psi'(\vec{r}, -t)$$

$$t' = -t$$

Dynamik ist zeitumkehrinvariant falls $\hat{T}$ gemäß (*) existiert

$$\hat{T} \hat{H}(\vec{r}, t) \hat{T}^{-1} \equiv \hat{H}'(\vec{r}, t') = \hat{H}'(\vec{r}, -t) = \hat{H}(\vec{r}, t)$$

und

$$\hat{T} i \hat{T}^{-1} = -i$$

(*)

da dann aus

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = \hat{H} \psi(\vec{r}, t)$$

wird

$$\hat{T} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = \hat{T} \hat{H} \psi = \hat{T} \hat{H} \hat{T}^{-1} \hat{T} \psi$$

$$-i\hbar \hat{T} \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = \hat{H} \psi'(\vec{r}, t')$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t'} \psi'(\vec{r}, t') = \hat{H} \psi'(\vec{r}, t')$$

aus (*) folgt sofort

$$\hat{T} = \hat{T}_0 \hat{K}$$

wobei K komplexe
Konjugation bedeutet

damit $\hat{T} \hat{H} \hat{T}^{-1} = \hat{H}$

$\Rightarrow$

ü.A. $\hat{T}_0 \vec{\alpha} \hat{T}_0^{-1} = -\vec{\alpha} \quad \hat{T}_0 \beta \hat{T}_0^{-1} = \beta$

$\Rightarrow \dots \Rightarrow \hat{T}_0 = -i\alpha_1\alpha_3$

$$\boxed{\hat{T} = -i\alpha_1\alpha_3 K}$$

Zeitumkehroperator
für Dirac-Bispinor

• PCT Transformation

$$\psi_{\text{PCT}}(x') = \hat{P} \hat{C} \hat{T} \psi(x) = \dots = i e^{i\varphi} \gamma_5 \psi(-x')$$

wieder Lösung d. Dirac-Gleichung

(C) Das kleinische Paradoxon in der Locher-Theorie

