

IV. 5. Relativistische Wellengleichung für Spin - 1/2 Teilchen: Dirac Gleichung

Problem der KG G: $\nexists$ positiv definite Wahrscheinlichkeitsdichte

Dirac (1928): Gleichung 1. Ordnung

Versuch:

$$(*) \quad i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\hbar c}{i} \left(\alpha_1 \frac{\partial \psi}{\partial x^1} + \alpha_2 \frac{\partial \psi}{\partial x^2} + \alpha_3 \frac{\partial \psi}{\partial x^3} \right) + \beta mc^2 \psi = H \psi$$

α_i können keine Zahlen sein, da (*) dann nicht invariant unter räuml. Drehungen

Ansatz: α_i, β : $N \times N$ Matrizen

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} N \text{ komponentiger Spalten-} \\ \text{vektor} \end{array}$$

Bedingungen

(i). Kontinuitätsgleichung für

$$g(\vec{r}, t) = \psi^\dagger(\vec{r}, t) \cdot \psi(\vec{r}, t) = \sum_{i=1}^N \psi_i^* \psi_i$$

(ii) Lorentzinvarianz

(iii) für freie Teilchen

$$E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m_0^2 c^4$$

damit (iii) $\Rightarrow$ jede Komponente erfüllt KG

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial t^2} \stackrel{!}{=} (-\hbar^2 c^2 \Delta + m_0^2 c^4) \psi_j \quad \forall j=1,2,\dots,N$$

aus (*) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} -\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= -\hbar^2 c^2 \sum_{k,e=1}^3 \frac{\alpha_k \alpha_e + \alpha_e \alpha_k}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^k \partial x^e} \\ &+ \frac{\hbar m_0 c^3}{i} \sum_{e=1}^3 (\alpha_e \beta + \beta \alpha_e) \frac{\partial \psi}{\partial x^e} + \beta^2 m_0^2 c^4 \psi \end{aligned}$$

Vergleich liefert

$\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2 \delta_{ij} \mathbb{1}$
$\alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0$
$\alpha_i^2 = \beta^2 = \mathbb{1}$

damit H hermitisch

$\alpha_i^\dagger = \alpha_i \quad \beta^\dagger = \beta$

Folgerungen

• Eigenwerte von d_i, β : ± 1

• aus $\alpha_i + \beta \alpha_i \beta = 0$ $d_i = -\beta \alpha_i \beta$

$$\begin{aligned} \text{Tr}\{\alpha_i\} &= -\text{Tr}\{\beta \alpha_i \beta\} = -\text{Tr}\{\beta^2 \alpha_i\} \\ &= -\text{Tr}\{\alpha_i\} \Rightarrow \text{Tr}\{\alpha_i\} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{analog } \text{Tr}\{\beta\} = 0$$

$\Rightarrow \alpha_i, \beta$ sind Matrizen mit gerader Dimension

$N=2$ geht nicht da es nur 3 antikommutierende Matrizen gibt (Pauli-Matrizen)

$\Rightarrow N=4$ minimale Dimension

mögliche Darstellung: Dirac-Matrizen (Blatt 2 Aufg. 4)

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix}$$

$i=1,2,3$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \hat{H} \psi \quad \hat{H} = (c \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + m_0 c^2 \beta)$$

Dirac-Gleichung

$$\hat{H}^\dagger = \hat{H}$$

(A) Kontinuitätsgleichung und Wahrscheinlichkeitsinterpretation

$$i\hbar \psi^\dagger \partial_t \psi = \frac{\hbar c}{i} \sum_{k=1}^3 \psi^\dagger \alpha_k \partial_k \psi + m_0 c^2 \psi^\dagger \beta \psi$$

$$-i\hbar (\partial_t \psi^\dagger) \psi = -\frac{\hbar c}{i} \sum_{k=1}^3 \partial_k \psi^\dagger \alpha_k \psi + m_0 c^2 \psi^\dagger \beta \psi$$

$$\Rightarrow i\hbar \partial_t (\psi^\dagger \psi) = i\hbar [(\psi^\dagger \partial_t \psi) + (\partial_t \psi^\dagger) \psi]$$

$$= \frac{\hbar c}{i} \sum_{k=1}^3 \psi^\dagger \alpha_k \partial_k \psi + (\partial_k \psi^\dagger) \alpha_k \psi$$

$$= \frac{\hbar c}{i} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} (\psi^\dagger \alpha_k \psi)$$

mit

$$\rho \equiv \psi^\dagger \psi = \sum_{i=1}^4 \psi_i^* \psi_i$$

Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\vec{j}^k \equiv c \psi^\dagger \alpha_k \psi$$

$k = 1, 2, 3$

bzw. $\vec{j} \equiv c \psi^\dagger \vec{\alpha} \psi$

Wahrscheinlichkeitsstromdichte

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0$$

Kontinuitätsgleichung

Erhaltungssatz

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{\infty}} d^3r \psi^\dagger \psi = 0$$

Erhaltung der Wahrscheinlichkeit

► noch zu zeigen: j^μ Lorentztensor 1. Stufe!

(B) freies Dirac-Teilchen

suchen stationäre Lösungen der Dirac Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \hat{H} \psi$$

Ansatz

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}) e^{-iEt/\hbar}$$

$$\hat{H} \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r})$$

Zerlegung des Bispinors ψ in zwei Spinore

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \quad \varphi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$
$$\chi = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\varepsilon \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{p} \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} + m_0 c^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix}$$

da $[\hat{H}, \vec{p}] = 0$

$$\begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \chi_0 \end{pmatrix} e^{i \vec{p} \cdot \vec{r} / \hbar}$$

$\Rightarrow \dots \ddot{U}.A. \dots \Rightarrow$

$$\varepsilon = \pm E_p$$

$$E_p = c \sqrt{\vec{p}^2 + m_0^2 c^2}$$

$$\chi_0 = \frac{c \vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{m_0 c^2 + \varepsilon} \psi_0$$

wieder zwei Typen von Lösungen (Zuordnung: später)

$$\varepsilon = + E_p$$

positive Frequenz

Teilchen

$$\varepsilon = - E_p$$

negative Frequenz

Anti-teilchen

Schreiben

$$\varepsilon = \lambda E_p$$

$$\lambda = \pm 1$$

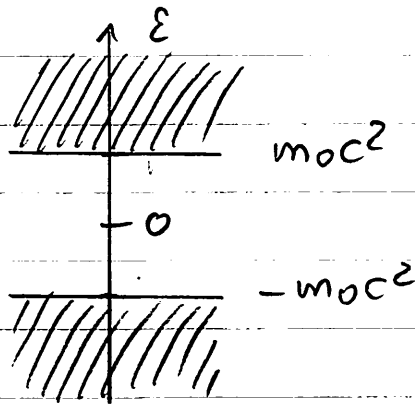
$$\psi_{\vec{p}, \lambda}(\vec{r}, t) = \mathcal{N} \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \frac{c \vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{m_0 c^2 + \lambda E_p} \psi_0 \end{pmatrix} \frac{e^{i(\vec{p} \cdot \vec{r} - \lambda E_p t) / \hbar}}{(2\pi\hbar)^{3/2}}$$

mit $\int d^3r \psi_{\vec{p},2}^\dagger(\vec{r},t) \psi_{\vec{p}',2'}(\vec{r},t) \stackrel{!}{=} \delta_{22'} \delta(\vec{p}-\vec{p}')$

$\Rightarrow N = \sqrt{\frac{m_0 c^2 + \lambda E_p}{2 \lambda E_p}}$

mit $\varphi_0 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ mit $u_1^* u_1 + u_2^* u_2 = 1$

Spektrum wie bei Klein-Gordon Gleichung



- Eigenzustände noch nicht vollständig bestimmt, da u_1, u_2 bis auf Normierung frei wählbar

- $\exists$ weitere Quantenzahl: Helizität

Ü.A.

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \quad [\vec{S}, \hat{H}] = 0$$

4-dim Verallg. des Spins

Helizitätoperator

$$\hat{\Lambda}_S \equiv \vec{S} \cdot \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$$

anschaulich: Projektion des Spins auf Richtung des Impulses

Bspl: $\vec{p} = (0, 0, p)$

$$\hat{\Lambda}_S = \hat{S}_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte $\pm \hbar/2$

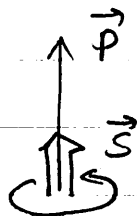
Eigenvektoren:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_{-1} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ u_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ u_{-1} \end{pmatrix}$$

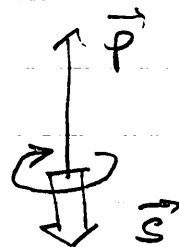
mit $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \lambda = +\frac{\hbar}{2}$

$$u_{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \lambda = -\frac{\hbar}{2}$$

u_1 :



u_{-1} :



ebene freie Diracwellen mit $\vec{p} = p \vec{e}_z$:

$$\psi_{p, \lambda, +\frac{1}{2}} = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{c p_z p}{m_0 c^2 + \lambda E_p} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} e^{\frac{i(pz - \lambda E_p t)}{\hbar}}$$

$$\psi_{p, \lambda, +\frac{1}{2}} = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{c p}{m_0 c^2 + \lambda E_p} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} e^{\frac{i(pz - \lambda E_p t)}{\hbar}}$$

$$\psi_{p, \lambda, -\frac{1}{2}} = N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{c p}{m_0 c^2 + \lambda E_p} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} e^{\frac{i(pz - \lambda E_p t)}{\hbar}}$$

$$\int d^3r \psi_{p, \lambda, s_z}^\dagger \psi_{p', \lambda', s_z'} = \delta_{\lambda \lambda'} \delta_{s_z s_z'} \delta(p_z - p_z')$$

(C) Dirac-Feld in Wechselwirkung mit dem elm. Feld, nicht relativistischer Grenzfall

Prinzip der minimalen Kopplung wie bei KGG :

$$\hat{p}^\mu \rightarrow \hat{p}^\mu - \frac{e}{c} A^\mu$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \left(c \vec{\alpha} \cdot \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) + eA_0 + \beta m_0 c^2 \right) \psi$$

Wie die entsprechende KG-Gl. ist diese Gleichung invariant unter Eich-Phasentransformationen

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{\partial \lambda(x)}{\partial x^\mu}$$

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = \psi(x) e^{-\frac{ie\lambda(x)}{\hbar c}}$$

betrachten nicht relativistischen Grenzfall:

$$\psi(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} \varphi(\vec{r}, t) \\ \chi(\vec{r}, t) \end{pmatrix} e^{-i(m_0 c^2 / \hbar)t}$$

$$\Rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \chi \\ c \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \varphi \end{pmatrix} + eA_0 \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} - 2m_0 c^2 \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$$

wobei $\vec{\pi} = \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}$ und φ, χ langsam veränderlich, d.h.

$$|i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \chi| \ll |m_0 c^2 \chi| \quad |eA_0 \chi| \ll |m_0 c^2 \chi|$$

$$\Rightarrow \chi \approx \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}}{2m_0 c^2} \varphi \quad |\chi| \ll |\varphi|$$

$$\Rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \varphi = \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})}{2m_0} \varphi + eA_0 \varphi$$

es gilt:

$$\begin{aligned}
 (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}) & \stackrel{\substack{\text{Ü. A.} \\ \downarrow}}{=} \vec{\pi}^2 + i \vec{\sigma} \cdot (\vec{\pi} \times \vec{\pi}) \\
 & = \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + i \vec{\sigma} \cdot \left[\underbrace{(-i\hbar \vec{\nabla} - \frac{e}{c} \vec{A}) \times (-i\hbar \vec{\nabla} - \frac{e}{c} \vec{A})}_{\text{nur dieser Term}} \right] \\
 & = \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 - \frac{e}{c} \hbar \vec{\sigma} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \\
 & = \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 - \frac{e \hbar}{c} \vec{\sigma} \cdot \vec{B}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \varphi = \left[\frac{1}{2m_0} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 - \frac{e}{2m_0 c} 2\vec{S} \cdot \vec{B} + eA_0 \right] \varphi}$$

Pauli Gleichung

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}$$

nichtrelativistische Gleichung für Spin 1/2 Teilchen!
mit g-Faktor 2

Speziell: homogenes, schwaches Magnetfeld

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{r}$$

$$\begin{aligned}
 \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 & = \left(\vec{p} - \frac{e}{2c} \vec{B} \times \vec{r} \right)^2 \approx \vec{p}^2 - \frac{e}{c} (\vec{B} \times \vec{r}) \cdot \vec{p} \\
 & = \vec{p}^2 - \frac{e}{c} \vec{B} \cdot \vec{L}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \varphi = \left[\frac{\vec{p}^2}{2m_0} - \frac{e}{2m_0 c} (\vec{L} + 2\vec{S}) \cdot \vec{B} + eA_0 \right] \varphi}$$

magnetische Moment des Elektrons

$$\hat{\vec{\mu}} = \hat{\vec{\mu}}_L + \hat{\vec{\mu}}_S = \frac{e}{2m_0 c} (\vec{L} + 2\vec{S})$$

(D) Dirac-Theorie und relativistische
Einteilchenquantenmechanik von Spin 1/2 Teilchen

Skalarprodukt

$$\begin{aligned} \langle \psi | \psi' \rangle &= \int d^3\vec{x} \, \psi^\dagger(\vec{x}) \psi'(\vec{x}) \\ &= \sum_{i=1}^4 \int d^3\vec{x} \, \psi_i^*(\vec{x}) \psi'_i(\vec{x}) \end{aligned}$$

Erwartungswert

$$\langle \psi | \hat{O} | \psi \rangle = \int d^3\vec{x} \, \psi^\dagger(\vec{x}) \hat{O} \psi(\vec{x})$$

Übliche Begriffe von Unitarität und Hermitizität

wie bei KGG: Frage: Sind alle hermiteschen Operatoren
Observable einer relativistischen
Einteilchenquantenmechanik?

Zur Erinnerung: Lösungen mit pos. Frequenz
→ Teilchen

Lösungen mit neg. Frequenz
→ Antiteilchen

wiederrum: wahre Erfindenoperatoren sind gerade Operatoren, d.h. sie mischen Zustände positiver und negativer Frequenz nicht

Def: Vorzeichenoperator

$$\hat{\Lambda} \equiv \frac{\hat{H}}{\sqrt{\hat{H}^2}} = \frac{c \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m_0 c^2}{c \sqrt{\vec{p}^2 + m_0^2 c^2}}$$

$$\hat{\Lambda} = \hat{\Lambda}^\dagger = \hat{\Lambda}^{-1} \quad \text{EW: } \pm 1$$

Def: Projektionsoperatoren

$$\hat{\Pi}_\pm = \frac{1}{2} (1 \pm \hat{\Lambda})$$

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}_\pm \psi_\pm &= \psi_\pm & \psi_\pm &\in \mathcal{H}_{(\pm)} \\ \hat{\Pi}_\pm \psi_\mp &= 0 \end{aligned}$$

Satz: Jeder Operator $\hat{A}$ kann in einen geraden Anteil $[\hat{A}]$ und einen ungeraden Anteil $\{\hat{A}\}$ zerlegt werden

$$\hat{A} = [\hat{A}] + \{\hat{A}\}$$

hier:

$$[\hat{A}] = \frac{1}{2} (\hat{A} + \hat{\Lambda} \hat{A} \hat{\Lambda})$$

$$\{\hat{A}\} = \frac{1}{2} (\hat{A} - \hat{\Lambda} \hat{A} \hat{\Lambda})$$

Bspl: • $[\hat{H}] = \hat{H}$

denn $\hat{L} \hat{H} \hat{L} = \hat{H}$

• $[\hat{\vec{p}}] = \vec{p}$

• $\left[\frac{d\vec{x}}{dt} \right] \neq \frac{d\vec{x}}{dt}$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{x}}{dt} &= -\frac{i}{\hbar} [\vec{x}, \hat{H}] = -\frac{i}{\hbar} [\vec{x}, c \vec{x} \cdot \vec{p} + \beta m_0 c^2] \\ &= c \vec{x} \quad \text{EW: } \pm c ! \end{aligned}$$

Ü. A. $\left[\frac{d\vec{x}}{dt} \right] = c [\vec{x}] = \frac{c \vec{p} \hat{L}}{c \sqrt{\vec{p}^2 + m_0^2 c^2}} \quad \text{?}$

d.h. wahre Geschwindigkeit für positive Frequenzen
 $c \vec{p} / E_p$ für negative Frequenzen $-c \vec{p} / E_p$.

negative Frequenz $\leftrightarrow$ negative Masse
 bei Bewegung

Zitterbewegung des Elektrons

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = c\vec{\alpha} = \hat{v}$$

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} c [\vec{x}, \hat{H}] = \frac{1}{\hbar} c \underbrace{(\vec{x}\hat{H} + \hat{H}\vec{x})}_{\text{Antikommutator}} - \frac{2ic\vec{x}\hat{H}}{\hbar}$$

$$\{\vec{x}, \hat{H}\} = \{\vec{x}, c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m_0 c^2\}$$

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij} \quad \{\alpha_i, \beta\} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{2ic\hbar}{\hbar} \vec{p} - \frac{2ic\hbar}{\hbar} \vec{x}\hat{H} = c \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2}$$

$\vec{p}$ ist konstante der Bewegung

Lösung:

$$\vec{x}(t) = \left(\vec{x}(0) - \frac{c\vec{p}}{\hat{H}} \right) e^{-\frac{2i\hat{H}t}{\hbar}} + \frac{c\vec{p}}{\hat{H}}$$

$$\begin{aligned} \text{denn } \frac{d\vec{x}(t)}{dt} &= \left(\vec{x}(0) - \frac{c\vec{p}}{\hat{H}} \right) \left(-\frac{2i\hat{H}}{\hbar} \right) e^{-2i\hat{H}t/\hbar} \\ &= \left(\vec{x}(t) - \frac{c\vec{p}}{\hat{H}} \right) \left(-\frac{2i\hat{H}}{\hbar} \right) \\ &= \frac{2ic\vec{p}}{\hbar} - \frac{2i\vec{x}\hat{H}}{\hbar} \quad \square \end{aligned}$$

nochmalige Integration von $\frac{d\vec{x}}{dt} = c\vec{a}$ liefert:

$$\vec{x}(t) = \vec{x}(0) + \frac{c^2 \vec{p}}{\hat{H}} t + \left(\vec{x}(0) - \frac{c\vec{p}}{\hat{H}} \right) \frac{i\hbar c}{2\hat{H}} e^{-2i\hat{H}t/\hbar}$$

$$\vec{x}(t) = \underbrace{\vec{x}(0) + \frac{c^2 \vec{p}}{\hat{H}} t}_{\text{wie klass. Teilchen}} + \underbrace{\left(\frac{\vec{x}(0)}{c} - \frac{c\vec{p}}{\hat{H}} \right) \frac{i\hbar c}{2\hat{H}} e^{-2i\hat{H}t/\hbar}}_{\text{schnell oszillierender Term}}$$

wie klass. Teilchen

schnell oszillierender Term

$$\vec{x}(t) = \vec{x}(0) + \frac{c^2 \vec{p}}{E} t$$

$$\text{Amplitude} \sim \frac{\hbar}{2m_0 c}$$

$$\text{Frequenz} \sim \frac{2m_0 c^2}{\hbar}$$

Zitterbewegung

es gilt:

$$\hat{\Pi}_{\pm} \left(\frac{\vec{x}(0)}{c} - \frac{c\vec{p}}{\hat{H}} \right) \frac{i\hbar c}{2\hat{H}} e^{-2i\hat{H}t/\hbar} \hat{\Pi}_{\pm} = 0$$

d.h. Zitterbewegung existiert nur wenn Wellenpaket Komponenten positiver und negativer Frequenzen enthält

Bew: zunächst gilt $[\hat{H}, \hat{\Pi}_{\pm}] = 0$

$$\hat{\Pi}_{\pm} \left(\vec{x}(0) - \frac{c\vec{p}}{\hat{H}} \right) \frac{i\hbar c}{2\hat{H}} e^{-2i\hat{H}t/\hbar} \hat{\Pi}_{\pm} =$$

$$\hat{\Pi}_{\pm} \left(\vec{x}(0) - \frac{c\vec{p}}{\hat{H}} \right) \hat{\Pi}_{\pm} \frac{i\hbar c}{2\hat{H}} e^{-2i\hat{H}t/\hbar}$$

ergibt • $[\hat{H}, \vec{x}] = [c\vec{x} \cdot \vec{p} + \beta m_0 c^2, \vec{x}]$

$$= \{c\vec{x} \cdot \vec{p} + \beta m_0 c^2, \vec{x}\} - 2\vec{x} \hat{H}$$

$$= 2c\vec{p} - 2\vec{x} \hat{H}$$

$$\cdot [\hat{\pi}_{\pm}, \vec{x}] = \frac{1}{2} [(1 \pm \hat{\lambda}), \vec{x}] = \pm \frac{1}{2} [\hat{\lambda}, \vec{x}]$$

$$= \pm \frac{1}{2} \left[\frac{\hat{H}}{E_p}, \vec{x} \right] = \pm \frac{c\vec{p}}{E_p} \mp \frac{\vec{x} \hat{H}}{E_p}$$

$$\Rightarrow \hat{\pi}_{\pm} \vec{x} = \vec{x} \hat{\pi}_{\pm} \pm \frac{c\vec{p}}{E_p} \mp \frac{\vec{x} \hat{H}}{E_p}$$

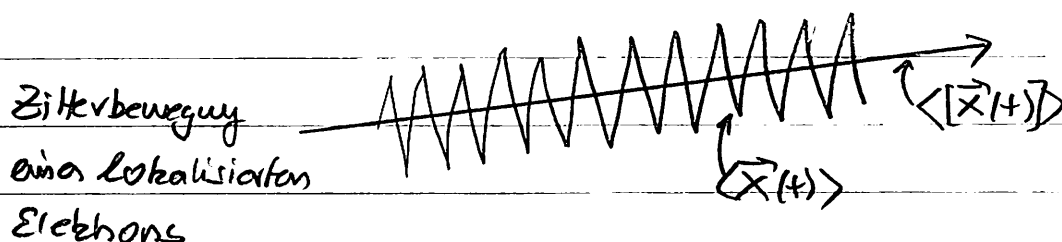
$$\Rightarrow \hat{\pi}_{\pm} \left(\vec{x} - \frac{c\vec{p}}{\hat{H}} \right) \hat{\pi}_{\pm}$$

$$= \left[\vec{x} \hat{\pi}_{\pm} \pm \frac{c\vec{p}}{E_p} \mp \frac{\vec{x} \hat{H}}{E_p} - \frac{c\vec{p}}{\hat{H}} \right] \hat{\pi}_{\pm}$$

$$= \left[\vec{x} \pm \frac{c\vec{p}}{E_p} \mp \frac{\alpha}{E_p} (\pm E_p) - \frac{c\vec{p}}{\pm E_p} \right] \hat{\pi}_{\pm} = 0$$

□

Bem: Um ein Wellenpaket auf $\Delta x \rightarrow \lambda_c = \frac{h}{2m_0 c}$ zu lokalisieren braucht man positive und negative Frequenzkomponenten



IV.6. Lorentzinvarianz der Dirac-Gleichung Kovariante Formulierung der Dirac-Theorie

$$\Sigma_A \leftarrow x_{\mu'} = a_{\mu'}^{\nu} x_{\nu} \rightarrow \Sigma_B$$

Lorentztrafo

$$\psi(x)$$

$$\psi'(x')$$

$$\left[i\hbar \partial_t - (c \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m_0 c^2) \right] \psi(x) = 0 \quad \left[i\hbar \partial_{t'} - (c \vec{\alpha}' \cdot \vec{p}' + \beta m_0 c^2) \right] \psi'(x') = 0$$

zunächst: andere Form der Dirac-Gleichung

$$\frac{\beta}{c} \cdot \left[i\hbar \partial_t - (c \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m_0 c^2) \right] \psi = 0$$

Def:

$$\gamma^0 \equiv \beta$$

$$\gamma^i \equiv \beta \alpha_i$$

$i = 1, 2, 3$

γ -Matrizen

$$\Rightarrow i\hbar \left(\gamma^0 \frac{\partial}{\partial x^0} + \gamma^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \gamma^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \gamma^3 \frac{\partial}{\partial x^3} \right) \psi - m_0 c \psi = 0$$

Dirac-Algebra ausgedrückt durch γ -Matrizen:

$$\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = \gamma^{\mu} \gamma^{\nu} + \gamma^{\nu} \gamma^{\mu} = 2 g^{\mu\nu}$$

Eigenschaften der γ^{μ}

(i) γ^{μ} ist unitär

$$(\gamma^{\mu})^{-1} = \gamma^{\mu\dagger}$$

(ii) γ^i ist anti-hermitisch ($i=1,2,3$)

$$(\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i$$

(iii) γ^0 ist hermitisch

$$(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$$

explizite Form der γ^μ

$$\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \beta \alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_i \\ -\alpha_i & 0 \end{pmatrix}$$

Satz: (Pauli) Alle Darstellungen der Dirac-Algebra $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ mit 4×4 Matrizen für die $\gamma^{0\dagger} = \gamma^0$, $\gamma^{i\dagger} = -\gamma^i$ gilt sind unitär äquivalent

Def: Feynman-Dirac (Feynman-dagger)

$$\begin{aligned} \not{B} &= \gamma^\mu B_\mu = \gamma_{\mu\nu} \gamma^\nu B^\mu = \gamma^0 B^0 - \sum_{i=1}^3 \gamma^i B^i \\ &= \gamma_\mu B^\mu \\ &= \gamma^0 B^0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{B} \end{aligned}$$

insbesondere

$$\not{\partial} = \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\gamma^0}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla}$$

damit kann die Dirac-Gleichung in die einfache Form

$$(i\hbar \not{\partial} - m_0 c) \psi = 0 \quad \text{oder mit } p^\mu = i\hbar \frac{\partial}{\partial x_\mu}$$

$$(\not{p} - m_0 c) \psi = 0$$

bei Kopplung an ein el. Feld gilt

$$\left(\cancel{p} - \frac{eA}{c} - m_0 c \right) \psi = 0$$

Hamiltonoperator

$$\hat{H} = c \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m_0 c^2$$

$$= c \underbrace{\gamma^0 \vec{\gamma}}_{\vec{\alpha}} \cdot \vec{p} + \gamma^0 m_0 c^2$$

Nachweis der Kovarianz bedeutet:

(i) aus $\psi(x)$ in Σ_A muß sich $\psi'(x')$ in Σ_B beschreiben lassen mit $x'_\mu = a_\mu{}^\nu x_\nu$

(ii) $\psi'(x')$ muß Dirac-Gleichung genügen mit $\tilde{\gamma}^\mu$ die zu γ^μ unitär äquivalent sind

Transformation muß linear sein

$$\psi'(x') = \psi'(ax) = S(a) \psi(x) = S(a) \psi(a^{-1}x')$$

$S(a)$ 4×4 Matrix S muß invertierbar sein

$$\psi(x) = S^{-1}(a) \psi'(x') = S^{-1}(a) \psi'(ax)$$

gleichsam

$$\psi(x) = S(a^{-1}) \psi'(ax) = S(a^{-1}) \psi'(x')$$

$$\Rightarrow S(a^{-1}) = S^{-1}(a)$$

da $\psi(x)$ Dirac Gleichung erfüllen soll gilt

$$\left[i\hbar \gamma^\mu S^{-1}(a) \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m_0 c S^{-1}(a) \right] \psi'(x') = 0$$

$$S(a) \cdot \left[i\hbar S(a) \gamma^\mu S^{-1}(a) \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m_0 c \right] \psi'(x') = 0$$

da außerdem

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu'}} = a_\mu^{\nu'} \frac{\partial}{\partial x^{\nu'}}$$

$$\Rightarrow \left[i\hbar S(a) \gamma^\mu S^{-1}(a) a_\mu^{\nu'} \frac{\partial}{\partial x^{\nu'}} - m_0 c \right] \psi'(x') = 0$$

d.h. Kovarianz ist gegeben, falls $S(a)$ existiert mit

$$S(a) \gamma^\mu S^{-1}(a) a_\mu^{\nu'} = \gamma^{\nu'}$$

oder

$$\boxed{a_\mu^{\nu'} \gamma^\mu = S^{-1}(a) \gamma^{\nu'} S(a)}$$

da dann

$$(i\hbar \gamma^{\nu'} \partial_{\nu'} - m_0 c) \psi'(x') = 0$$

Def: eine 4-komponentige Wellenfunktion
wird 4-Lorentz Spinor genannt, wenn
er sich bei Lorentztransformationen gemäß

$$\psi'(x') = S(a) \psi(a^{-1}x')$$

mit $a_{\mu}^{\nu'} g^{\mu} = S^{-1}(a) g^{\nu'} S(a)$ transformiert

(A) Konstruktion von S für eigentliche
Lorentztransformationen

• infinitesimale L-Transf.

$$a_{\mu}^{\nu'} = \delta_{\mu}^{\nu'} + \Delta \omega_{\mu}^{\nu'}$$

(a) boost in x-Richtung

$$\Delta \omega^{10} = \Delta \omega^{01} = -\frac{v}{c}$$

$$x^{0'} = x^0 + \frac{v}{c} x^1 \quad x^{2'} = x^2$$

$$x^{1'} = x^1 + \frac{v}{c} x^0 \quad x^{3'} = x^3$$

(b) Rotation um z-Achse

$$\Delta \omega^{21} = -\Delta \omega^{12} = \varphi$$

$$x^{0'} = x^0$$

$$x^{1'} = x^1 + \Delta\varphi x^2$$

$$x^{3'} = x^3$$

$$x^{2'} = x^2 - \Delta\varphi x^1$$

$\Rightarrow$

$$\Delta\omega^{0i} = \Delta\omega^{i0}$$

$i \in 1,2,3$

$$\Delta\omega^{ij} = -\Delta\omega^{ji}$$

6 Komponenten

$$\Delta\omega^{\mu\mu} = 0$$

$$\Delta\omega_{\mu}^{\nu} = \Delta\omega \left(I_{\vec{b}} \right)_{\mu}^{\nu}$$

$$S(\delta_\nu^M + \Delta\omega_\nu^M) = ?$$

Entwicklung nach $\Delta\omega_\nu^M$

$$S = \mathbb{1} - \frac{i}{4} \sigma_{\mu\nu} \Delta\omega^{\mu\nu}$$

$$S^{-1} = \mathbb{1} + \frac{i}{4} \sigma_{\mu\nu} \Delta\omega^{\mu\nu}$$

wegen
 $S^{-1}(\alpha) = S(\alpha^{-1})$

$$\sigma_{\mu\nu} = -\sigma_{\nu\mu}$$

Achtung: jede der 6 von Null verschiedenen Größen $\sigma_{\mu\nu}$ ist eine 4×4 Matrix!

einsetzen in Bestimmungsgleichung für S

$$a_\mu^\nu z^\mu = S^{-1} z^\nu S$$

$$(\delta_\mu^\nu + \Delta\omega_\mu^\nu) z^\mu = (1 + \frac{i}{4} \sigma_{\alpha\beta} \Delta\omega^{\alpha\beta}) z^\nu (1 - \frac{i}{4} \sigma_{\alpha\beta} \Delta\omega^{\alpha\beta})$$

$$\cancel{z^\nu} + \Delta\omega_\mu^\nu z^\mu \approx \cancel{z^\nu} + \frac{i}{4} \Delta\omega^{\alpha\beta} (\sigma_{\alpha\beta} z^\nu - z^\nu \sigma_{\alpha\beta}) + \mathcal{O}(\Delta\omega^2)$$

$$\Delta\omega_\mu^\nu z^\mu = \frac{i}{4} \Delta\omega^{\alpha\beta} [\sigma_{\alpha\beta}, z^\nu]$$

$$\Delta\omega^\alpha_\beta z^\beta g^\nu_\alpha = \Delta\omega^{\alpha\beta} z_\beta g^\nu_\alpha$$

$$= \frac{1}{2} \Delta\omega^{\alpha\beta} (z_\beta g^\nu_\alpha - z_\alpha g^\nu_\beta)$$

$$\Rightarrow [\sigma_{\alpha\beta}, \gamma^\nu] = 2i (\gamma^\nu \gamma_\alpha - \gamma_\beta \gamma_\alpha)$$

$\Rightarrow$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{i}{2} [\gamma_\alpha, \gamma_\beta]$$

jeder der σ von Null verschieden $\sigma_{\alpha\beta}$ ist eine 4×4 Matrix

$$S = 1 + \frac{1}{8} [\gamma_\alpha, \gamma_\beta] \Delta\omega^{\alpha\beta}$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = -\sigma_{\beta\alpha}$$

• endliche eigentliche L-Trafo

Idee: wiederholte Anwendung der infinitesimalen Trafo

inf. L-Trafo

$$\Delta\omega^\nu_\mu = \Delta\omega (I_{\vec{u}})^\nu_\mu$$

$\Delta\omega$ Lorentz "drehwinkel" $\vec{u}$ Richtung

Bspl: Lorentz drehung entlang x-Achse

$\hat{=}$ boost in x-Richtung mit $\Delta\omega = \Delta\beta = \frac{\Delta v}{c}$

$$(I_x)^\nu_\mu = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_x^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$I_x^3 = I_x \quad \text{etc.}$$

d.h. endliche eigentliche L-Transformierung x

$$x^{0'} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{v/c}{N} I_x \right)_{v_1}^{v_1} \left(1 + \frac{v/c}{N} I_x \right)_{v_2}^{v_2} \dots x^{v_N}$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{v/c}{N} I_x \right)^N \right]_{\mu}^{v} x^{\mu} \quad \Delta \omega = \frac{\omega}{N}$$

$$= \left(e^{\frac{v}{c} I_x} \right)_{\mu}^{v} x^{\mu} = \left[\cosh\left(\frac{v}{c} I_x\right) + \sinh\left(\frac{v}{c} I_x\right) \right]_{\mu}^{v} x^{\mu}$$

was ist $\cosh(\omega I_x) = \left(1 + \frac{\omega^2}{2!} I_x^2 + \frac{\omega^4}{4!} I_x^4 + \dots \right)$

$$= 1 + \left(\frac{\omega^2}{2!} + \frac{\omega^4}{4!} + \dots \right) I_x^2$$

$$= 1 - I_x^2 + (\cosh \omega) I_x^2$$

analog $\sinh(\omega I_x) = (\sinh \omega) I_x$

$\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^2 \\ x^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \frac{v}{c} & -\sinh \frac{v}{c} & 0 & 0 \\ -\sinh \frac{v}{c} & \cosh \frac{v}{c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

damit:

$$\psi'(x') = S(a) \psi(x)$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{i}{4} \epsilon_{\mu\nu} \frac{\omega}{N} I_{\vec{a}}^{\mu\nu} \right)^N \psi(x)$$

$$\boxed{\psi'(x') = e^{-\frac{i}{4} \omega \epsilon_{\mu\nu} I_{\vec{a}}^{\mu\nu}} \psi(x)}$$

← 21.06.

◐ Bspl. für $I_{\vec{a}}$

boost in x-Richtung

enthalten
eine 0
Komponente

$$(I_x)_{\mu}^{\nu} = \begin{pmatrix} -\epsilon_x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Spinor transform bei
boost

$$\boxed{S_L \equiv e^{-\frac{i}{4} \frac{a}{c} \epsilon_{\mu\nu} I_L^{\mu\nu}}}$$

$$\psi'(x') = e^{-\frac{i}{4} \frac{a}{c} [\epsilon_{01} I_x^{01} + \epsilon_{10} I_x^{10}]} \psi(x)$$

$$\underline{\underline{\psi'(x') = e^{-\frac{i}{2} \frac{a}{c} \epsilon_{01}} \psi(x)}}$$

Rotation um z-Achse

enthalten
nur
räumliche
Komponenten

$$(I_3)_{\mu}^{\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Spinor transform bei
eigentlichen Drehungen

$$\boxed{S_R \equiv e^{-\frac{i}{4} \varphi \epsilon_{ij} I_R^{ij}}}$$

$i, j \in 1, 2, 3$

$$\underline{\underline{\psi'(x') = e^{\frac{i}{2} \varphi \epsilon_{12}} \psi(x)}}$$

$$\text{aus } \sigma_{12} = \sigma^{12} = \frac{1}{2} [\sigma^1, \sigma^2]$$

findet man leicht

$$\sigma^{12} = \begin{pmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{pmatrix}$$

Bem: Bi-Spinor geht bei Rotation um 2π nicht in sich selbst über sondern erst bei Rotation um 4π !

$$\boxed{\psi'(x') \Big|_{\varphi=4\pi} = e^{2\pi i \sigma_{12}} \psi(x) = \psi(x)}$$

ergibt:

$$S_R(\omega_{ij}) = e^{-\frac{i}{4} \sigma_{ij} \omega^{ij}} \quad i,j=1,2,3$$

$$\boxed{S_R^+ = e^{\frac{i}{4} \sigma_{ij}^+ \omega^{ij}} = e^{\frac{i}{4} \sigma_{ij} \omega^{ij}} = S_R^{-1}}$$

$\Rightarrow$ Spinortransformationsoperator für räuml. Drehungen ist unitär

dagegen

$$\boxed{S_L = S_L^+ \neq S_L^{-1}}$$

allg. gilt:

$$\boxed{S^{-1} = \gamma_0 S^+ \gamma_0}$$

(*)

- wegen (*) ist $\psi^\dagger \psi$ i.A. kein Lorentzskalar

$$\begin{aligned}\psi^{\dagger'}(x') \psi'(x') &= [S \psi(x)]^\dagger [S \psi(x)] \\ &= \psi^\dagger(x) S^\dagger S \psi(x) \neq \psi^\dagger \psi\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

Def: adjungierter Bi-Spinor

$$\boxed{\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0}$$

- $\bar{\psi} \psi$ ist ein Lorentzskalar

$$\bar{\psi}'(x') \psi'(x') = \psi^{\dagger'}(x') \gamma^0 \psi'(x')$$

$$= \psi^\dagger(x) S^\dagger \gamma^0 S \psi(x)$$

$$= \psi^\dagger(x) \underbrace{\gamma^0 \gamma^0}_1 S^\dagger \gamma^0 S \psi(x)$$

$$= \bar{\psi}(x) S^{-1} S \psi(x) = \bar{\psi}(x) \psi(x)$$

□

4-Stromdichte

$$\{\vec{j}^M\} = \{j^0, \vec{j}\} = \{c\psi^\dagger\psi, c\psi^\dagger \vec{\alpha}\psi\}$$

$$j^M = c\psi^\dagger \gamma^0 \gamma^M \psi = c\bar{\psi} \gamma^M \psi$$

Verhalten unter Lorentztransformation?

$$j^{M'}(x') = c\psi'^\dagger(x') \gamma^0 \gamma^M \psi'(x')$$

$$= c\psi^\dagger(x) S^\dagger \gamma^0 \gamma^M S \psi(x)$$

$$= c\psi^\dagger(x) \gamma^0 S^{-1} \gamma^M S \psi(x)$$

wegen Bestimmungsgleichung $a^M_{\nu} \gamma^\nu = S^{-1} \gamma^M S$

$$j^{M'}(x') = c\psi^\dagger(x) \gamma^0 a^M_{\nu} \gamma^\nu \psi(x)$$

$$= a^M_{\nu} c\psi^\dagger(x) \gamma^0 \gamma^\nu \psi(x)$$

$$= a^M_{\nu} j^\nu(x) \quad \text{Lorentz-Vektor!}$$

• $j^M = c\bar{\psi} \gamma^M \psi$ ist Lorentz-Vektor

(B) Spinor unter Raumspiegelung

uneigentliche Lorentz-Transformation

$$\vec{r}' = -\vec{r} \quad t' = t$$

Transformchar:

$$a^\nu_\mu = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix} = g^{\mu\nu}$$

Raumspiegelungen lassen sich nicht durch infinitesimale Rotationen aus der Identität erzeugen.

Vereinbarung: für Raumspiegelung $\hat{S} \equiv \hat{P}$
(Parität)

zu lösen $a_\mu^\nu \gamma^\mu = \hat{P} \gamma^\nu \hat{P}^{-1}$

$$\Rightarrow a^\sigma_\nu a^\nu_\mu \gamma^\mu = P a^\sigma_\nu \gamma^\nu P^{-1}$$

$$\left. \begin{matrix} \hat{P}^{-1} \\ \hat{P} \end{matrix} \right| \quad \sigma^\sigma_\mu \gamma^\mu = P \sum_{\nu=0}^3 g^{\sigma\nu} \gamma^\nu P^{-1} = P g^{\sigma\sigma} \gamma^\sigma P^{-1}$$

$$P^{-1} \gamma^\sigma P = g^{\sigma\sigma} \gamma^\sigma = \pm \gamma^\sigma$$

Lösung

$$P = e^{i\varphi} \gamma^0$$

φ zunächst beliebig. Mit Forderung daß 4 Raum-Spiegelungen Spinor in sich selbst überführen,
(4 statt 2 analog zu Rotationen) $\Rightarrow e^{i\varphi} = 1^{1/4}$

d.h. $e^{i\varphi} = \pm 1, \pm i$

• Eigenschaften von P :

(i) P ist unitär

$$P^{-1} = e^{-i\varphi} \gamma^0 = P^\dagger$$

(ii) P erfüllt aber auch allg. Relation ($S^{-1} = \gamma^0 S^\dagger \gamma^0$)

$$P^{-1} = \gamma^0 P^\dagger \gamma^0 \quad (\gamma^0 = \gamma^0)$$

$\Rightarrow$ Raumspiegelung explizit

$$\begin{aligned} \psi'(x') &= \psi'(\vec{r}', t') = \psi'(-\vec{r}, t) = \hat{P} \psi(\vec{r}, t) \\ &= \hat{P} \psi(-\vec{r}', t') = \hat{P} \hat{P}_0 \psi(\vec{r}', t') \end{aligned}$$

wobei $\hat{P}_0: \vec{r}' \rightarrow -\vec{r}'$

für ruhende Elektronen

$$\left. \begin{aligned} P \psi^{(1)} &= e^{i\varphi} \psi^{(1)} \\ P \psi^{(2)} &= e^{i\varphi} \psi^{(2)} \\ P \psi^{(3)} &= -e^{i\varphi} \psi^{(3)} \\ P \psi^{(4)} &= -e^{i\varphi} \psi^{(4)} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{entgegengerichtete} \\ P\text{-Eigenwerte} \end{array}$$

Bem. Zeitumkehr komplizierter!
Diskussion später

(C) Bilineare Kovarianten der Dirac Spinoren

um Lorentzinvarianz explizit ausnutzen zu können,
müssen wir uns fragen welche Form meßbare
Größen haben dürfen damit die L-Invarianz erhalten
bleibt

Bspl: $\bar{\psi}\psi$, $j^\mu = c\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$

Kombination von γ -Matrizen liefert 16 linear unabhängige
 4×4 Matrizen

$$\begin{array}{lll} \Gamma^S = 1 & \Gamma_\mu^V = \gamma_\mu & \Gamma_{\mu\nu}^T = \sigma_{\mu\nu} \\ \Gamma^P = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \gamma_5 \equiv \gamma^5 & & \Gamma_\mu^A = \gamma_5\gamma_\mu \end{array}$$

S - Skalar

V - Vektor

T - Tensor

P - Pseudoskalar

A - Axialer Vektor

es gilt $\{\gamma^\mu, \gamma_5\} = 0$ $[\gamma_5, \sigma_{\mu\nu}] = 0$

eigentlich Lorentz-träuf

$$S\gamma_5 = \gamma_5 S$$

Raumspiegelung

$$P\gamma_5 = -\gamma_5 P$$

bilineare Formen

(Beweis $\rightarrow$ Ü.A.)

(i) Skalar	$\bar{\psi} \psi$
(ii) Pseudoskalar	$\bar{\psi} \gamma_5 \psi$
(iii) Vektor	$\bar{\psi} \gamma^\mu \psi$
(iv) Axialvektor (Pseudovektor)	$\bar{\psi} \gamma_5 \gamma^\mu \psi$
(v) Tensor 2. Stufe	$\bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \psi$

26.06.

IV. 7. Lösungen der Dirac-Gleichung für einfache Probleme

(A) Ebene Wellen aus Lorentztransformation

Dirac-Teilchen in Ruhe

$$\psi(\vec{r}, t) = \omega_{(0)}^r e^{-i \epsilon_r m_0 c^2 t / \hbar} \quad r=1,2,3,4$$

$$\epsilon_{1,2} = +1$$

$$\epsilon_{3,4} = -1$$