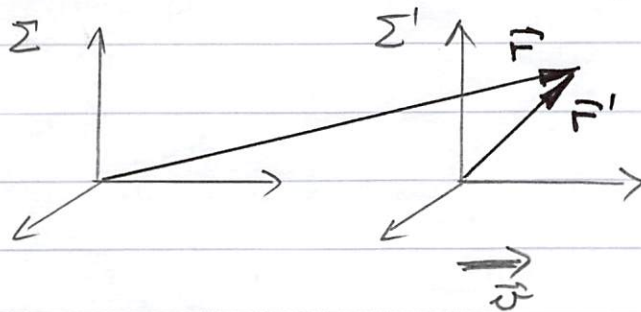


IV. Relativistische Quantenmechanik

IV.1. Abriß der Speziellen Relativitätstheorie

(A) Postulate der SRT; Gallilei- und Lorentztrafo

Gallileitransformation von Inertialsystemen



$$\boxed{\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t \quad t' = t} \quad \text{Gallileitrafo}$$

Maxwellsche E-Dynamik

$$\text{in } \Sigma: \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right) \vec{E}(\vec{r}, t) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} &= \frac{\partial x_{i'}}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_{i'}} = \frac{\partial}{\partial x_{i'}} & \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\partial x_{i'}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_{i'}} \\ & & &= \frac{\partial}{\partial t'} - v_i \frac{\partial}{\partial x_{i'}} \end{aligned}$$

$$\text{in } \Sigma': \left[\Delta' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} + \underbrace{\frac{2}{c^2} \vec{v} \cdot \vec{\nabla}' \frac{\partial}{\partial t'} - \frac{1}{c^2} (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}') (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}')}_{\text{nicht invariant!}} \right] \vec{E} = 0$$

(i) MWGL nicht Gallileiinvariant

Experimente zum Äther: Michelson, Morley (1881, 1887)
Fizeau (1851)

(ii) Äther kein vernünftiges Konzept
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum (!)
unabhängig vom Inertialsystem

Postulate der SRT: Poincaré, Einstein

I. Naturgesetze haben in jedem Inertialsystem dieselbe Form

II. Die Lichtgeschwindigkeit ist konstant und unabhängig vom Inertialsystem

Bewegung einer Wellenfront im Vakuum

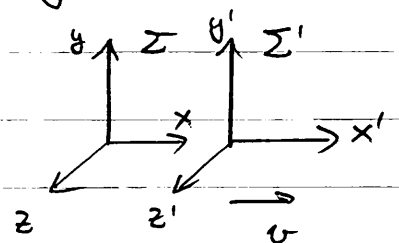
$$c^2 dt^2 - |d\vec{r}|^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) = 0$$

nach 2. Postulat

$$c^2 dt'^2 - (dx'^2 + dy'^2 + dz'^2) = 0$$

Def: $x^0 \equiv ct$ $x^1 \equiv x$ $x^2 \equiv y$ $x^3 \equiv z$

$$\vec{v} = v \hat{e}_x = v \hat{e}_{x'}$$



$$dx^{0'2} - dx^{1'2} = dx^{02} - dx^{12}$$

$$dx^{2'} = dx^2$$

$$dx^{3'} = dx^3$$

Annahme: lineare Transformation + Umkehrung $\hat{=} \vec{v} \leftrightarrow -\vec{v}$

$x^{0'} = \gamma (x^0 - \beta x^1)$	$x^{2'} = x^2$	<u>Lorentztransformation</u>
$x^{1'} = \gamma (x^1 - \beta x^0)$	$x^{3'} = x^3$	

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c} \quad \beta = |\vec{\beta}| = \frac{v}{c} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$x^0 = \gamma (x^{0'} + \beta x^{1'})$	$x^{2'} = x^2$	<u>inverse L-Transf</u>
$x^1 = \gamma (x^{1'} + \beta x^{0'})$	$x^{3'} = x^3$	

für $|\vec{v}|/c \ll 1 \quad \gamma \rightarrow 1 \quad \text{L-Transf} \hat{=} \text{Galileitransf}$

(B) 4-Vektoren und Minkowski Raum

L-Transf $\rightarrow$ 4dim. Koordinatensystem

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$$

Längenelement $d\underline{s} = \underline{e}_\mu dx^\mu \quad \mu = 0, 1, 2, 3$

$$d\underline{s} \cdot d\underline{s} = ds^2 = dx^0{}^2 - (dx^1{}^2 + dx^2{}^2 + dx^3{}^2)$$

$$= \sum_{\mu, \nu} \underline{e}_\mu \cdot \underline{e}_\nu dx^\mu dx^\nu = \sum_{\mu, \nu} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

$$\boxed{ds^2 = \sum_{\mu, \nu} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}$$

$g_{\mu\nu}$ metrischer Tensor

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

nicht positiv definit!

$ds^2 = 0$ lichtartiger Abstand

$ds^2 > 0$ zeitartiger Abstand

$ds^2 < 0$ raumartiger Abstand

Lorentztransformation als Pseudodrehung

$$\cosh \varphi = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma \quad \sinh \varphi = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma\beta$$

$$x^{0'} = \cosh \varphi x^0 - \sinh \varphi x^1$$

$$x^{1'} = -\sinh \varphi x^0 + \cosh \varphi x^1$$

Transformationmatrix

$$A^0_0 = A^1_1 = \cosh \varphi$$

$$A^{0'}_1 = A^{1'}_0 = -\sinh \varphi$$

$$(A^{i'}_i) = \begin{pmatrix} \cosh \varphi & -\sinh \varphi & 0 & 0 \\ -\sinh \varphi & \cosh \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (A^i_{i'})$$

$$\det(A^{i'}_i) = 1$$

2. Postulat $ds^2 = 0 \Rightarrow ds'^2 = 0$

$$ds'^2 = \sum_{\mu, \nu} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

$$= \sum_{\alpha, \beta} g_{\mu\nu} A^\mu_{\alpha'} A^\nu_{\beta'} dx^{\alpha'} dx^{\beta'}$$

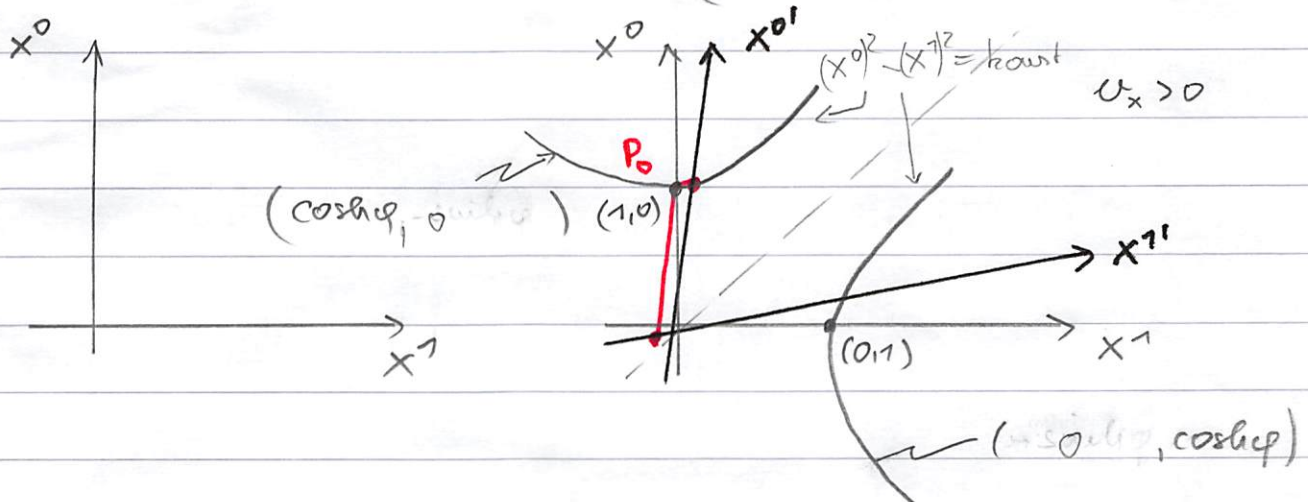
$$= ds'^2 = \sum_{\alpha, \beta} g_{\alpha'\beta'} dx^{\alpha'} dx^{\beta'}$$

$$g_{\alpha'\beta'} = \sum_{\mu, \nu} g_{\mu\nu} A^\mu_{\alpha'} A^\nu_{\beta'}$$

$$g_{0'0'} = g_{00} \cosh^2 + g_{11} \sinh^2 = \cosh^2 \varphi - \sinh^2 \varphi = 1$$

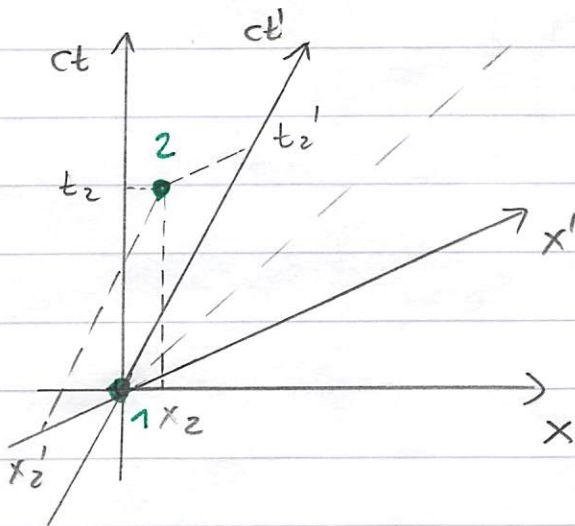
$$g_{0'1'} = g_{00} \cosh(-\sinh) + g_{11} (-\sinh) \cosh = \cosh \varphi \sinh \varphi - \sinh \varphi \cosh \varphi = 0$$

er. $g_{\mu'\nu'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ invariant!



$$\left. \begin{array}{l} P_0 \mid x^0 = 1, x^1 = 0 \\ x^0' = \cosh \varphi \\ x^1' = -\sinh \varphi \end{array} \right\} \text{ schiefwinklige KS}$$

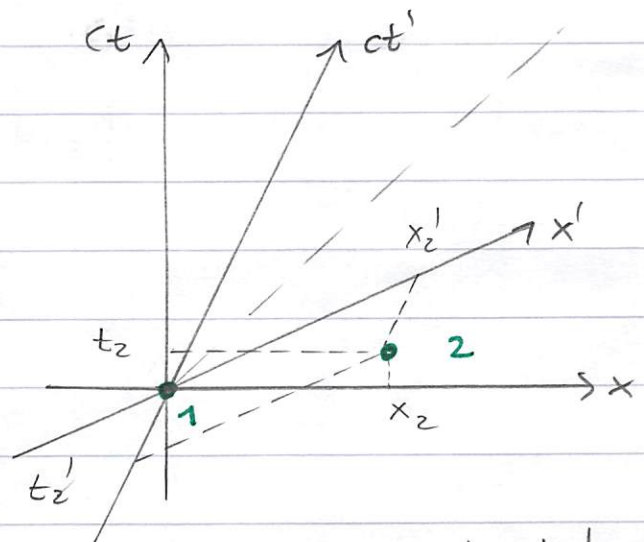
zeitartiger Abstand



$$\begin{array}{ll} t_2 > t_1 & t_2' > t_1' \\ x_2 > x_1 & x_2' < x_1' \end{array}$$

Zeitliche Reihenfolge dieselbe
räumliche Anordnung umgekehrt

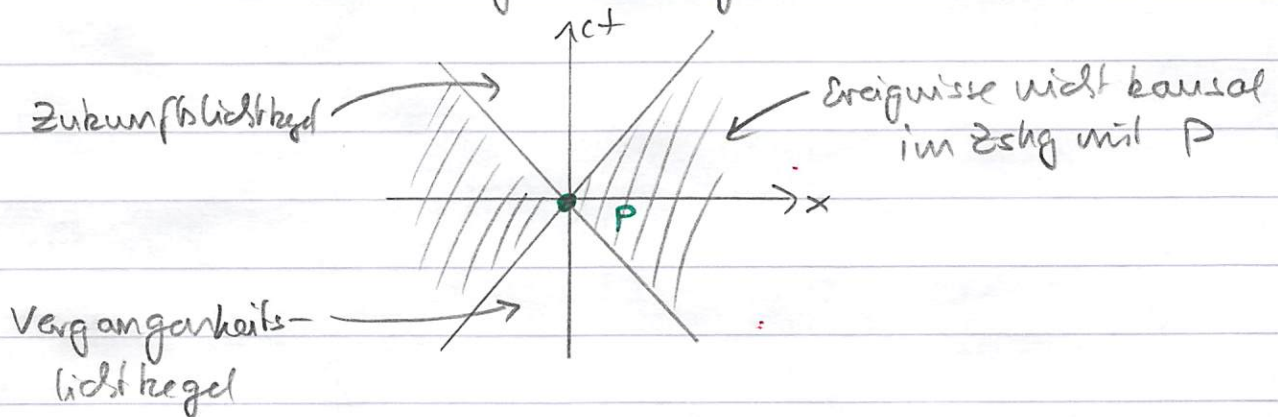
raumartiger Abstand



$$\begin{array}{ll} t_2 > t_1 & t_2' < t_1' \\ x_2 > x_1 & x_2' > x_1' \end{array}$$

zeitl. Reihenfolge umgekehrt
räuml. Anordnung dieselbe

Ursache - Wirkungsrelation muß für kausal
zusammenhängende Ereignisse invariant sein



Ko- und Kontravariante Koordinaten

$$\underline{a} = \sum_{i=1}^n a^i \underline{e}_i \quad \{ \underline{e}_i \} \text{ kovariante Basis lin. unabh. Vektoren}$$

Skalarprodukt

$$\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j \equiv g_{ij} = g_{ji}$$

metr. Tensor

orthogonale Koordinaten
Euklidischer Raum

$$g_{ij} = \delta_{ij}$$

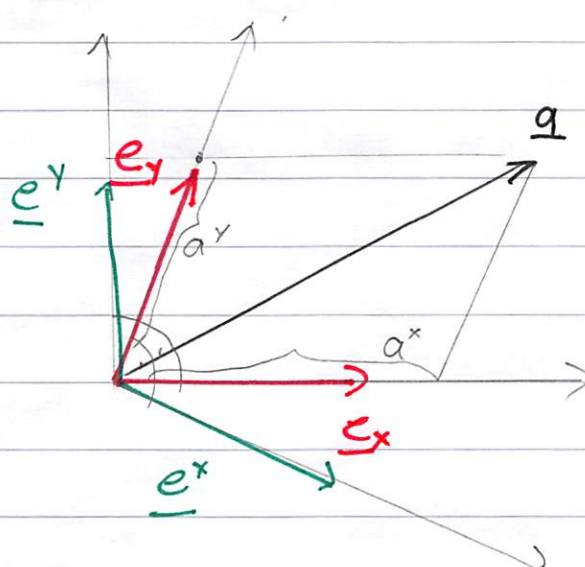
Schiefwinklige Koordinaten

$$\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j \neq 0$$

kontravariante Basis $\{ \underline{e}^j \}$

$$\underline{e}_i \cdot \underline{e}^j = \delta_{ij}$$

Bsp!:



offensichtlich

$$\underline{e}^y \underline{e}_x = \underline{e}^x \underline{e}_y = 0$$

es gilt $\underline{e}_i = \sum_{j=1}^n g_{ij} \underline{e}^j$

da $\underline{e}_i \cdot \underline{e}_k = \sum_j g_{ij} \underline{e}^j \cdot \underline{e}_k = \sum_j g_{ij} \delta_{jk} = g_{ik}$

Umkehrung

$$\underline{e}^i = \sum_{j=1}^n g^{ij} \underline{e}_j$$

$$g^{ij} = g_{ji}$$

$$\underline{a} = \sum_{i=1}^n a^i \underline{e}_i = \sum_{i=1}^n a_i \underline{e}^i$$

kontravariante Komponente

kovariante Komponente

Summenkonvention: Über doppelt auftretende ko- und kontravariante Indizes wird summiert

es gilt

$$a^i = \sum_k g^{ik} a_k \equiv g^{ik} a_k$$

$$a_i = g_{in} a^n$$

$$g^{ij} = g^{in} g^{je} g_{ne} \Rightarrow g^{in} g_{ne} = \delta_{ie}$$

17.11.15 →

(c) geometrische Objekte und Tensoren

Koordinatensystem in $\mathbb{R}^d$: $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_d\}$

ein geometr. Objekt $T_{emn \dots}^{ijk \dots}(\{x^i\})$ heißt Tensor falls es sich bei einer Koordinatentransformation

$$\Sigma \rightarrow \Sigma'$$

$$dx^{j'} = dx^j(\{x^i\}) = \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} dx^i = A^{j'}_i dx^i$$

wie die Koordinaten transformiert, d.h. falls in Σ' gilt

$$\boxed{T_{e'm'n' \dots}^{i'j'k' \dots} = A^{i'}_i A^{j'}_j A^{k'}_k \dots A_{e'}^{e'} A_{m'}^m A_{n'}^n \dots T_{emn \dots}^{ijk \dots}}$$

$T_{emn \dots}^{ijk \dots}$ heißt Pseudotensor falls

$$\boxed{T_{e'm'n' \dots}^{i'j'k' \dots} = \text{sgn}(A^{i'}_i) A^{i'}_i A^{j'}_j \dots A_{e'}^{e'} A_{m'}^m \dots T_{emn \dots}^{ijk \dots}}$$

$\Rightarrow$ physikalische Gesetze sind forminvariant gegenüber Koordinatentransformationen falls sie als Tensorrelationen formuliert werden können

Stufe des Tensors: Anzahl der freien Indizes

(D) Relativistische Formulierung der Elektrodynamik

Maxwellgleichungen im Vakuum (Gauß)

inh. MWGL $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi \rho$ $\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$

hom. MWGL $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ $\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$

Konsistenzbedingung: Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

elm. Potentiale: (Lösung der homogenen Gleichungen)

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi$$

Correspondenz

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi = -4\pi \rho$$

4-Potential

$A^\mu = (\phi, \vec{A})$
$\Delta_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu = (\phi, -\vec{A})$

4-Stromdichte

$$j^\mu = (c\varrho, \vec{j})$$
$$j_\mu = (c\varrho, -\vec{j})$$

4-Koordinate

$$x^\mu = (ct, \vec{r})$$
$$x_\mu = (ct, -\vec{r})$$

4-Gradient

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right)$$
$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right)$$

Wellenoperator

$$\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \partial^\mu \partial_\mu$$
$$= \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right) \cdot \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right)$$
$$= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$$

damit können wir die EDyn. in kovarianter Weise formulieren:

• Lorenzbedingung

$$\partial^\mu A_\mu = \partial_\mu A^\mu = \frac{1}{c} \frac{\partial A^0}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

• Wellengleichung

$$\square A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu$$

• Kontinuitätsgleichung

$$\partial_\mu j^\mu = \partial^\mu j_\mu = \frac{1}{c} \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{EDyn. ist Lorentzinvariant}}$

die Formulierung mittels Potentialen ist technisch die einfachste hat aber den Haken, daß man sich auf eine Eichung festlegen muß, eine eichfreie Formulierung kann mittels der antisymmetrischen Feldstärkeformen erfolgen

$$\boxed{F^{\alpha\beta} \equiv \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha}$$

6 freie Komponenten

$$F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

• inhomogene MWGL

$$\boxed{\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} j^\beta}$$

dualer Feldstärke tensor

$$\boxed{\mathcal{F}^{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{c} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\gamma\delta}}$$

$$\varepsilon^{0123} = 1$$

+ vollständig antisymmetrisch

• homogene MWGL

$$\boxed{\partial_\alpha \mathcal{F}^{\alpha\beta} = 0}$$

(E) Relativistische Mechanik

• klass. Mechanik $\vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}$ bzw. $\vec{p} = m \frac{d\vec{r}}{dt}$, $E = \frac{\vec{p}^2}{2m}$

• relativist. Mechanik $\vec{r} \rightarrow \boxed{x^\mu = (ct, \vec{r})}$ 4-Orbitor

Problem: $\dot{x}^\mu = (c, \dot{\vec{r}})$ kein Lorentzvektor
da dt nicht invariant

• Eigenzeit: $dt \rightarrow \boxed{d\tau = dt \sqrt{1 - \beta^2}} = dt/\gamma$

$$\text{da } ds^2 = c^2 dt^2 - |d\vec{r}|^2 = c^2 dt^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \\ = c^2 d\tau^2 \quad ds^2 \text{ invariant} \Rightarrow d\tau^2 \text{ invariant}$$

4-Impuls:

$$\boxed{p^\mu = m_0 \frac{dx^\mu}{d\tau} = m_0 \gamma \frac{dx^\mu}{dt} \\ = \gamma (m_0 c, \vec{p})}$$

• kinetische Energie in nicht-rel. Mechanik $E = \frac{\vec{p}^2}{2m_0}$

relativist. Energie

$$\boxed{E = m\bar{c}^2 = \gamma m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}$$

$$\boxed{m \equiv \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}$$

$$\frac{|v|}{c} \rightarrow 0$$

$$E \approx m_0 c^2 + \frac{m_0 v^2}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{v^2}{c^2}\right)$$

↑
Ruheenergie
ohne dyn. Konvergenz

↖ nichtrelativist. kin. Energie

man findet

$$p_0 = \frac{E}{c}$$

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right)$$

$$\vec{p} = m \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Achtung: m nicht m_0 !

$$p_0^2 - \vec{p} \cdot \vec{p} = m_0^2 c^2$$

$$\begin{aligned} E^2 &= p_0^2 c^2 = c^2 p^2 + m_0^2 c^4 \\ E &= \sqrt{c^2 p^2 + m_0^2 c^4} \end{aligned}$$

IV. 2. Relativistische Wellengleichungen für Teilchen - allgemeine Überlegungen

Forderungen und Bedingungen

(1) Raum- und Zeitkoordinaten müssen gleichberechtigt vorkommen

(2) es muß $\Delta x \gtrsim \frac{\hbar}{\Delta p} \gtrsim \frac{\hbar}{2m_0 c}$

da sonst wegen $E > 2m_0 c^2$ Paarzeugung einsetzt

⇒ Lokalisierung nicht besser als

$$\lambda_c = \frac{\hbar}{m_0 c}$$

Comptonwellenlänge

(3) weiterhin wird wegen

$$\Delta t \sim \frac{\Delta x}{c} > \frac{\hbar}{m_0 c^2} \quad \text{Comptonzeit}$$

die zeitliche Auflösung nicht beliebig genau werden können $\Rightarrow$ Konzept der Wahrscheinlichkeitsdichte wird neu zu überdenken sein

• nichtrelativistische Q.-Mechanik eines freien Teilchens in Ortdarstellung

$$H = \frac{p^2}{2m} \quad H \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad \vec{p} \rightarrow -i\hbar \vec{\nabla}$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 \psi$$

• relativistische Impulsoperatoren in Ortdarstellung

$$\vec{p} \rightarrow p^M \equiv -i\hbar \vec{\nabla} \rightarrow -i\hbar \partial^M$$

$$\boxed{\hat{p}^M \equiv i\hbar \nabla^M \equiv i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial(ct)}, -\vec{\nabla} \right)}$$

• relativistische Hamiltonfunktion

$$(*) \quad H = \sqrt{c^2 p^2 + m_0^2 c^4}$$

daraus könnte man die Wellengleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \sqrt{-\hbar^2 c^2 \Delta + m_0^2 c^4} \psi \quad ?$$

Schließen, Problem: Entwicklung der Wurzel liefert Ableitungen
 ∞ Ordnung $\Rightarrow$ nichtlokale Theorie

um Wurzeloperator zu umgehen quadrieren wir Gl. (*)

$$H^2 = c^2 p^2 + m_0^2 c^4$$

$$\Rightarrow -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = \left(-\hbar^2 c^2 \Delta + m_0^2 c^4 \right) \psi$$

$$\left[\partial_\mu \partial^\mu + \left(\frac{m_0 c}{\hbar} \right)^2 \right] \psi = 0$$

Klein-Gordon
Gleichung

27.07

IV, 3. Relativistische Wellengleichung für Spin-0 Teilchen: Klein-Gordon Gleichung

$$\left[\partial_\mu \partial^\mu + \left(\frac{m_0 c}{\hbar} \right)^2 \right] \psi = \left[\square + \left(\frac{m_0 c}{\hbar} \right)^2 \right] \psi = 0$$

(A) 4-Stromdichte und Kontinuitätsgleichung

$$\left(\hat{p}_\mu \hat{p}^\mu - m_0^2 c^2 \right) \psi = 0$$

$$\left(\hat{p}_\mu \hat{p}^\mu - m_0^2 c^2 \right) \psi^* = 0$$

$$\psi^* (\hat{p}_\mu \hat{p}^\mu - m_0^2 c^2) \psi - \psi (\hat{p}_\mu \hat{p}^\mu - m_0^2 c^2) \psi^* = 0$$

oder

$$-\psi^* (\hbar^2 \partial_\mu \partial^\mu + m_0^2 c^2) \psi + \psi (\hbar^2 \partial_\mu \partial^\mu + m_0^2 c^2) \psi^* = 0$$

$$\Rightarrow \partial_\mu (\psi^* \partial^\mu \psi - \psi \partial^\mu \psi^*) = \partial_\mu \tilde{j}^\mu = 0$$

4-Stromdichte

$$\tilde{j}_\mu = \frac{i\hbar}{2m_0} (\psi^* \partial_\mu \psi - \psi \partial_\mu \psi^*)$$

Erhaltungssatz

$$\partial^\mu \tilde{j}_\mu = 0$$

ausgeschrieben

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{i\hbar}{2m_0 c^2} (\psi^* \partial_t \psi - \psi \partial_t \psi^*) \right]$$

$$+ \vec{\nabla} \cdot \left[-\frac{i\hbar}{2m_0} (\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*) \right] = 0$$

das hat die Form der nichtrelativistischen Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

d.h.

$$\frac{d}{dt} \int_{V_\infty} d^3\vec{r} \rho = 0$$

$\Rightarrow$ kann man

$$(*) \quad \boxed{g = \frac{i\hbar}{2m_0 c^2} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right)}$$

als Wahrscheinlichkeitsdichte und

$$\boxed{\vec{j} = -\frac{i\hbar}{2m_0} \left(\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^* \right)}$$

als Wahrscheinlichkeitsstromdichte interpretieren? **Nein!**

g ist nicht positiv definit $\Rightarrow$ g Ladungsdichte
 ψ beschreibt geladenes Feld

versteht man in $(*)$

$$\psi \longleftrightarrow \psi^* \quad \hat{=} \quad g \longleftrightarrow -g$$

► ψ^* beschreibt ein Feld mit entgegengesetzter Ladung zu dem von g

gilt $\psi = \psi^*$, d.h. ist ψ reell $\Rightarrow g = 0$

► ein reelles Feld beschreibt ein elektrisch neutrales Teilchen

(B) der nicht-relativistische Grenzfall

Ansatz $\psi(\vec{r}, t) = \varphi(\vec{r}, t) e^{-i \frac{m_0 c^2}{\hbar} t}$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} - i \frac{m_0 c^2}{\hbar} \phi \right) e^{-i \frac{m_0 c^2}{\hbar} t}$$

wir werden später sehen, daß $|i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t}| \sim |(E - m_0 c^2) \phi|$
 wobei $E' = E - m_0 c^2$ die überschüssige Energie zur Ruhe-
 energie ist. Da $|E'| \ll m_0 c^2 \Rightarrow$

$$\left| \frac{\partial \phi}{\partial t} \right| \ll \left| \frac{m_0 c^2}{\hbar} \phi \right|$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - 2i \frac{m_0 c^2}{\hbar} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{m_0^2 c^4}{\hbar^2} \phi \right) e^{-i \frac{m_0 c^2}{\hbar} t}$$

$$\Rightarrow \left\{ \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - 2i \frac{m_0 c^2}{\hbar} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{m_0^2 c^4}{\hbar^2} \phi \right) - \Delta \phi + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \phi \right\} = 0$$

↑
vernachlässigbar

$$\Rightarrow i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \Delta \phi$$

Schrödingergleichung für ein freies Teilchen

(c) das freie Klein-Gordon Feld

$$(\hat{p}_\mu \hat{p}^\mu - m_0^2 c^2) \psi = 0$$

Ansatz

$$\boxed{\psi = A e^{-i p_\mu x^\mu / \hbar}}$$

analog zum Schrödingerfeld $e^{i(kx - \omega t)} = e^{i\left(\frac{p x}{\hbar} - \frac{E t}{\hbar}\right)}$

einsetzen liefert mit $\hat{p}_\mu \rightarrow -i\hbar \partial_\mu$ (Orbitaldarstellung)

$$\hat{p}^\mu = g^{\mu\nu} \hat{p}_\nu = -i\hbar g^{\mu\nu} \partial_\nu$$

$$\hat{p}_\mu \hat{p}^\mu \rightarrow -\hbar^2 g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$$

$$\hat{p}_\mu \hat{p}^\mu e^{i p_2 x^2 / \hbar} \rightarrow -\hbar^2 g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu e^{i p_2 x^2 / \hbar}$$

$$= g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = p_\mu p^\mu$$

$$p_\mu p^\mu - m_0^2 c^2 = 0$$

mit $p_0 = E/c = \hbar\omega/c$

$$\omega^2 = \frac{c^2}{\hbar^2} (\vec{p}^2 + m_0^2 c^2)$$

$$\omega = \pm \omega_p = \pm \frac{c}{\hbar} \sqrt{\vec{p}^2 + m_0^2 c^2}$$

positive &
negative Frequenz

für gegebenen Impuls $\vec{p}$ existieren 2 Lösungen

$$\psi_{(\pm)} = A_{(\pm)} e^{i \left(\frac{\vec{p} \cdot \vec{x}}{\hbar} \mp \omega_p t \right)}$$

zugehörige Ladungsdichte:

$$\rho_{(\pm)} = \pm \frac{\hbar \omega_p}{m_0 c^2} \psi_{(\pm)}^* \psi_{(\pm)}$$

$\psi_{(+)}$ Teilchen mit positiver Ladung & Frequenz

$\psi_{(-)}$ " " " negativer " " & Frequenz

(D) Schrödingerdarstellung der Klein-Gordon Gleichung

wie im Übungsblatt 2 gezeigt wurde läßt sich die KGG mittels der neuen Felder

$$\varphi \equiv \frac{1}{2} \left(\psi + \frac{i\hbar}{m_0 c^2} \frac{\partial}{\partial t} \psi \right)$$

$$\chi \equiv \frac{1}{2} \left(\psi - \frac{i\hbar}{m_0 c^2} \frac{\partial}{\partial t} \psi \right)$$

in die Form einer 2-komponentigen Gleichung

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \hat{H} \Psi} \quad \Psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$$

mit

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{H} &= (\sigma_z + i\sigma_y) \frac{\vec{p}^2}{2m_0} + \sigma_z m_0 c^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \frac{\vec{p}^2}{2m_0} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} m_0 c^2 \end{aligned}}$$

bringen.

$$\hat{H}^\dagger \neq \hat{H}$$

$$\boxed{\hat{H}^2 = c^2 \vec{p}^2 + m_0^2 c^4}$$

$$\text{da } \sigma_j^2 = \mathbb{1}_2 \text{ und } \{\sigma_i, \sigma_j\}_+ = 2i \varepsilon_{imn} \sigma_n + 2\delta_{im}$$

- für ein freies Teilchen mit Impuls $\vec{p}$ gilt (Ü.A.)

$$\hbar\omega = \pm \hbar\omega_p = \pm c\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}$$

$$\omega = \omega_p$$

$$(*) \quad \Psi^{(+)}(\vec{p}) = A_{(+)} \begin{pmatrix} m_0 c^2 + \hbar\omega_p \\ m_0 c^2 - \hbar\omega_p \end{pmatrix} e^{i(\frac{\vec{p}}{\hbar} \cdot \vec{x} - \omega_p t)} \quad \begin{array}{l} \text{"vorwärts"} \\ \text{laufende Welle} \\ \text{mit pos.} \\ \text{Ladung} \end{array}$$

worin im nichtrelativistischen Grenzfall $\frac{p^2}{2m_0} \ll m_0 c^2$ wird

$$\Psi^{(+)}(\vec{p}) \longrightarrow A_{(+)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(\frac{\vec{p}}{\hbar} \cdot \vec{x} - \omega_p t)}$$

$$\omega = -\omega_p$$

$$(**) \quad \Psi^{(-)}(\vec{p}) = A_{(-)} \begin{pmatrix} m_0 c^2 - \hbar\omega_p \\ m_0 c^2 + \hbar\omega_p \end{pmatrix} e^{-i(\frac{\vec{p}}{\hbar} \cdot \vec{x} + \omega_p t)} \quad \begin{array}{l} \text{"rückwärts"} \\ \text{laufende Welle} \\ \text{mit neg. Ladung} \end{array}$$

nichtrelativist. Grenzfall

$$\Psi^{(-)}(\vec{p}) \longrightarrow A_{(-)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i(\frac{\vec{p}}{\hbar} \cdot \vec{x} + \omega_p t)}$$

- Ladungsdichte in Schrödinger-Darstellung $\frac{p^2}{2m} \ll m_0 c^2$

$$g = \frac{i\hbar}{2m_0 c^2} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) \quad \begin{array}{l} \psi = \varphi + \chi \\ i\hbar \psi = (\varphi - \chi) m_0 c^2 \end{array}$$

$$= \frac{m_0 c^2}{2m_0 c^2} (\psi^* (\varphi - \chi) + \psi (\varphi^* - \chi^*))$$

$$= \frac{1}{2} \left((\varphi^* + \chi^*) (\varphi - \chi) + (\varphi + \chi) (\varphi^* - \chi^*) \right)$$

$$S = (\varphi^* \varphi - \chi^* \chi) = \Psi^\dagger G_2 \Psi$$

Ladungsnormierung

$$\boxed{\int d^3x \Psi^\dagger G_2 \Psi = \pm 1}$$

(E) Ladungskonjugation

Vergleich von (*) und (**) zeigt

$$\Psi^{(-)}(-\vec{p}) = G_x \left(\Psi^{(+)}(\vec{p}) \right)^*$$

d.h. falls $\Psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$ zu einer positiven Ladung gehört, dann beschreibt

$$\boxed{\Psi_c = G_x \Psi^* = \begin{pmatrix} \chi^* \\ \varphi^* \end{pmatrix}}$$

einen Zustand negativer Ladung. Die Operation nennt man Ladungskonjugation

es gilt offensichtlich

$$(\Psi_c)_c = G_x (G_x \Psi^*)^* = G_x^2 \Psi = \Psi$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \Psi & - \text{Teilchen} \\ \Psi_c & - \text{Antiteilchen} \end{array}}$$

$$\begin{array}{ccc}
 & C & \\
 \varphi^{(+)} & \longrightarrow & \chi^{(-)} \\
 \chi^{(+)} & \longrightarrow & \varphi^{(-)} \\
 \vec{p} & \longrightarrow & -\vec{p} \\
 \omega_p & \longrightarrow & -\omega_p
 \end{array}$$

neutrale Teilchen sind in diesem Sinne ihre eigenen Antiteilchen

$$\psi_c = G_X \psi^* = \alpha \psi$$

es muß $\alpha = \alpha^*$ da $\psi = \varphi + \chi = \psi^*$

$$\text{aus } (\psi_c)_c = \psi \Rightarrow$$

$$(\psi_c)_c = (\alpha \psi)_c = G_X (\alpha \psi)^* = \alpha G_X \psi^* = \alpha^2 \psi$$

$$\Rightarrow \alpha = \pm 1$$

$$\alpha = +1$$

$$\alpha = -1$$

neutrale Teilchen
mit positiver
Ladungsparität

$$\psi_c = \psi$$

neutrale Teilchen
mit negativer
Ladungsparität

$$\psi_c = -\psi$$

Bem: man kann zeigen

$$\hat{C} \hat{H}_{\text{stark WW}} = \hat{H}_{\text{stark WW}} \hat{C}$$

$$\hat{C} \hat{H}_{\text{elm WW}} = \hat{H}_{\text{elm WW}} \hat{C}$$

$$\text{aber } \hat{C} \hat{H}_{\text{schw WW}} \neq \hat{H}_{\text{schw WW}} \hat{C}$$

d.h. die schwache Wechselwirkung ist nicht invariant unter Ladungs- (Teilchen - Antiteilchen) konjugation

24.05.

(F) Klein-Gordon Teilchen in Wechselwirkung mit dem elm. Feld

nichtrelativistische Q.M., minimale Kopplung

$$\hat{H} \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - eA_0 \quad \vec{\hat{p}} \rightarrow -i\hbar \vec{\nabla} - \frac{e}{c} \vec{A}$$

in kovarianter Form

$$\hat{p}^\mu \rightarrow \hat{p}^\mu - \frac{e}{c} A^\mu \quad \hat{p}_\mu \rightarrow \hat{p}_\mu - \frac{e}{c} A_\mu$$

$\Rightarrow$

$$\left(\hat{p}^\mu - \frac{e}{c} A^\mu \right) \left(\hat{p}_\mu - \frac{e}{c} A_\mu \right) \psi = m_0^2 c^2 \psi$$

Klein-Gordon Gleichung im elm. Feld

auch im elm. Feld gilt eine Kontinuitätsgleichung

$$\partial_\mu \tilde{j}^\mu = 0$$

wobei jetzt

$$\tilde{j}_\nu \equiv \frac{i\hbar}{2m_0} (\psi^* \partial_\nu \psi - \psi \partial_\nu \psi^*) - \frac{eA_\nu}{m_0 c} \psi \psi^*$$

↑
neuer Term

die K-G-Gleichung im elm. Feld ist Ausgangspunkt für die Beschreibung von KG-Teilchen im Coulombpotential

$$V(r) = eA_0 = -\frac{Ze^2}{r} \quad \vec{A} = 0$$

$$\text{Ü.A.} \Rightarrow \left[(i\hbar \partial_t - V(r))^2 - m_0^2 c^4 + \hbar^2 c^2 \Delta \right] \psi(\vec{r}, t) = 0$$

stationäre Lösung

$$\psi(\vec{r}, t) = \phi_\epsilon(\vec{r}) e^{-\frac{i}{\hbar} \epsilon t}$$

$$\Rightarrow \left[(\epsilon - V(r))^2 - m_0^2 c^4 + \hbar^2 c^2 \Delta \right] \phi_\epsilon(\vec{r}) = 0$$

• Eichinvarianz der minimalen Kopplung

Eichinvarianz der ED

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{\partial \lambda(x)}{\partial x^\mu}$$

fordern Invarianz der KGG:

$$g^{\mu\nu} \left(i\hbar \partial_\nu - \frac{e}{c} A'_\nu \right) \left(i\hbar \partial_\mu - \frac{e}{c} A'_\mu \right) \psi' - m_0^2 c^2 \psi' = 0$$

$$\begin{aligned} &= g^{\mu\nu} \left(i\hbar \partial_\nu - \frac{e}{c} A_\nu - \frac{e}{c} \frac{\partial \lambda}{\partial x^\nu} \right) \left(i\hbar \partial_\mu - \frac{e}{c} A_\mu - \frac{e}{c} \frac{\partial \lambda}{\partial x^\mu} \right) \psi' \\ &\quad - m_0^2 c^2 \psi' = 0 \end{aligned}$$

$$\hat{=} g^{\mu\nu} \left(i\hbar \partial_\nu - \frac{e}{c} A_\nu \right) \left(i\hbar \partial_\mu - \frac{e}{c} A_\mu \right) \psi - m_0^2 c^2 \psi = 0$$

falls

$$\psi \rightarrow \psi' = \psi e^{-i \frac{e}{\hbar c} \lambda(x)}$$

• lokale Eichphaseninvarianz der gekoppelten KGG

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &\rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{\partial \lambda(x)}{\partial x^\mu} \\ \psi(x) &\rightarrow \psi'(x) = \psi(x) e^{-i \frac{e}{\hbar c} \lambda(x)} \end{aligned}$$

erhält die Form der KGG in minimaler Kopplung an das elm. Feld

Beispiel:

pionisches Atom mit Punktkern

$$V(r) = eA_0(r) = -\frac{Zc^2}{r}$$

Übungsblatt 3 $\Rightarrow \psi(\vec{r}, t) = \phi_E(\vec{r}) e^{-i\frac{\epsilon t}{\hbar}}$

$$\left[(\epsilon - V(r))^2 - m_0^2 c^4 + \hbar^2 c^2 \Delta \right] \phi_E(\vec{r}) = 0$$

$$\phi_E(\vec{r}) = \frac{R_{\epsilon e}(r)}{r} Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi)$$

$\Rightarrow \dots \Rightarrow$

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{(\epsilon - V(r))^2 - m_0^2 c^4}{\hbar^2 c^2} \right] R_{\epsilon e}(r) = 0$$

bzw.

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{\ell(\ell+1) - (Z\alpha)^2}{r^2} + \frac{2\epsilon Z\alpha}{\hbar c r} - \frac{m_0^2 c^4 - \epsilon^2}{\hbar^2 c^2} \right] R = 0$$

wobei

$$\alpha \equiv \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137.03602}$$

Feinstrukturkonstante

uns interessieren gebundene Lösungen mit $\epsilon^2 \leq (m_0 c^2)^2$

Abkürzungen:

$$\beta \equiv 2 \frac{\sqrt{m_0^2 c^4 - \varepsilon^2}}{\hbar c}$$

$$g \equiv \beta r$$

$$\mu \equiv \sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - (Z\alpha)^2}$$

$$\lambda \equiv \frac{2Z\alpha\varepsilon}{\hbar c\beta}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{d^2}{dg^2} - \frac{\mu^2 - 1/4}{g^2} + \frac{\lambda}{g} - \frac{1}{4} \right] R_{\ell\ell}(g) = 0$$

betrachten Grenzfälle $\rightarrow$

$$\underline{g \rightarrow \infty:}$$

$$\left(\frac{d^2}{dg^2} - \frac{1}{4} \right) R_{\ell\ell}(g)$$

$$R_{\ell\ell}(g) \underset{g \rightarrow \infty}{=} A e^{-g/2} + B e^{g/2}$$

||
0 Normierbarkeit

$$\underline{g \rightarrow 0:}$$

$$\left(\frac{d^2}{dg^2} - \frac{\mu^2 - 1/4}{g^2} \right) R_{\ell\ell}(g) = 0$$

$$R_{\ell\ell}(g) \sim g^\nu$$

$$\nu(\nu-1)g^{\nu-2} - \left(\mu^2 - \frac{1}{4}\right)g^{\nu-2} = 0$$

$\Rightarrow$

$$\nu_{\pm} = \frac{1}{2} \pm \left[\frac{1}{4} + \mu^2 - \frac{1}{4} \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \pm \mu$$

wegen Konvergenz im Ursprung nur

$$\nu = \frac{1}{2} + \mu$$

$\Rightarrow$ verallgemeinerte Potenzreihenansatz
(Sommerfeldsche Polynommethode)

$$R_{\text{rel}}(s) = A s^{\mu+1/2} e^{-s/2} f(s)$$

$$\frac{d^2 f}{ds^2} + \left(\frac{2\mu+1}{s} - 1 \right) \frac{df}{ds} + \frac{\mu+1/2-2}{s} f = 0$$

mit $c \equiv 2\mu+1$ $a \equiv \mu+1/2-2$

und

$$f(s) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m s^m$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=2}^{\infty} a_m m(m-1) s^{m-2} + c \sum_{m=1}^{\infty} m a_m s^{m-2} \\ - \sum_{m=1}^{\infty} m a_m s^{m-1} - a \sum_{m=0}^{\infty} a_m s^{m-1} = 0 \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert

$$a_1 = a_0 \frac{a}{c} \quad a_2 = \frac{a_1 (a+1)}{2 (c+1)}$$

$$a_m = \frac{a_{m-1}}{m} \frac{a+m-1}{c+m-1}$$

Abbruchbedingung (damit für $g \rightarrow \infty$ korrektes Verhalten $\sim e^{-g/2}$)

$$a + n' \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow a_{n'+1} = a_{n'+2} = \dots = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \mu + \frac{1}{2} + n' = \frac{Z\alpha E_n}{(m_0^2 c^4 - E_n^2)^{1/2}}$$

$$E_{n'l}^2 = \frac{m_0^2 c^4}{1 + \frac{(Z\alpha)^2}{\left\{n' + \frac{1}{2} + \left[(l + \frac{1}{2})^2 - (Z\alpha)^2\right]^{1/2}\right\}^2}}$$

wie bei H-Problem: Hauptquantenzahl n

$$n = n' + l + 1$$

$$n = 1, 2, 3, \dots \quad l = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$$

$$E_{n\ell} = m_0 c^2 \left[1 + \frac{(Z\alpha)^2}{\left(n - l - \frac{1}{2} + \left[(l + \frac{1}{2})^2 - (Z\alpha)^2\right]^{1/2}\right)^2} \right]^{-1/2}$$

Entwicklung nach $Z^2 \alpha^2$

$$E_{ne} = m_0 c^2 \left[1 - \frac{Z^2 \alpha^2}{2n^2} - \frac{Z^4 \alpha^4}{2n^4} \left(\frac{n}{l+1/2} - \frac{3}{4} \right) + \dots \right]$$

/
|
\

Ruheenergie Schrödinger-energie relativist. Korrektur
 (Aufhebung der l-Entartung)

Bem: • für $Z\alpha > (l + \frac{1}{2})$ E_{ne} imaginär!

$\nexists$ 1s Zustand für $Z\alpha > \frac{1}{2}$
 $Z_{1s} > \frac{1}{\alpha} \approx 68$

IV.4. Zusammenhang zwischen Klein-Gordon Gleichung und relativistische 1-Teilchen-Quantenmechanik von Spin-0 Teilchen

Zur Erinnerung:

nicht-relativist. Q.M.

$$|\psi\rangle \in \mathcal{H}$$

$$\hat{O}$$

$$\vec{p}$$

Schrödinger Wellenmechanik

$$\psi(\vec{r}) \in L^2(\mathbb{R}^3)$$

$$\hat{O}_D$$

$$\vec{p}$$

$$\vec{p}$$

$$\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}$$

$$\langle \psi | \psi' \rangle$$

$$\int d^3\vec{r} \quad \psi(\vec{r})^* \psi(\vec{r}')$$

$$\langle \psi | \hat{O} | \psi' \rangle$$

$$\int d^3\vec{r} \quad \psi^*(\vec{r}) \hat{O} \psi(\vec{r})$$

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle$$

$$\frac{d}{dt} \hat{U}(t, t_0) = -\frac{i}{\hbar} \hat{H} \hat{U}(t, t_0)$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = H_D \psi(\vec{r}, t)$$

$\Rightarrow$ was ist die entsprechende Korrespondenz für das Klein-Gordon Feld

Vermutung: Schrödinger-Darstellung!

$$i\hbar \partial_t \Psi = \hat{H} \cdot \Psi$$

$$\Psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$$

aber: • $\hat{H}^\dagger \neq \hat{H}$ d.h. $\hat{H}$ ist nicht im eigentlichen Sinne hermitisch

• wir haben gesehen: für die Ladungsdichte gilt

$$\rho = \Psi^\dagger \sigma_z \Psi$$

bzw. für die Ladung

$$Q = \int d^3x \quad \Psi^\dagger \sigma_z \Psi$$

- aus der klassischen Feldtheorie
in der die Hamiltonfunktion zum
Energie-Impulstensor verallgemeinert wird,
folgt, daß der korrekte Ausdruck für die
Energie des KG-Feldes

$$E = \int d^3x \Psi^\dagger \partial_3 \hat{H} \Psi$$

ist,

←

Def: verallgemeinertes Skalarprodukt, Φ -Produkt

$$\langle \Psi | \Psi' \rangle_\Phi = \int d^3x \Psi^\dagger \partial_3 \Psi'$$

Def: Erwartungswert

$$\langle \Psi | \hat{O} | \Psi \rangle_\Phi = \int d^3x \Psi^\dagger \partial_3 \hat{O} \Psi$$

Def: ein Operator $\hat{U}$ heißt Φ -unitär, oder
verallgemeinert unitär, falls gilt

$$\begin{aligned} \langle \hat{U} \Psi | \hat{U} \Psi' \rangle_\Phi &= \int d^3x \Psi^\dagger \hat{U}^\dagger \partial_3 \hat{U} \Psi' \\ &\stackrel{!}{=} \langle \Psi | \Psi' \rangle_\Phi = \int d^3x \Psi^\dagger \partial_3 \Psi' \end{aligned}$$

d.h. es gilt

$$\hat{U}^\dagger \partial_3 \hat{U} = \partial_3 \quad \text{oder} \quad \hat{U}^\dagger \partial_3 = \partial_3 \hat{U}^{-1}$$

bzw mit $\sigma_3^2 = 1$

$$\hat{U}^\dagger \equiv \sigma_3 \hat{U}^\dagger \sigma_3 = \hat{U}^{-1}$$

Def: ein Operator $\hat{L}$ heißt Φ -hermitisch oder verallgemeinert hermitisch, falls gilt

$$\hat{L}^\dagger \equiv \sigma_3 \hat{L}^\dagger \sigma_3 = \hat{L} \quad \left(\hat{L}^\dagger \sigma_3 = \sigma_3 \hat{L} \right)$$

Bem: $\hat{H}^\dagger = \sigma_3 \hat{H}^\dagger \sigma_3 = \hat{H}$

Satz: Erwartungswerte Φ -hermitescher Operatoren sind reell

Bew: $\langle \hat{L} \rangle_\Phi = \int d^3x \Psi^\dagger \sigma_3 \hat{L} \Psi$

$$\langle \hat{L} \rangle_\Phi^* = \int d^3x \Psi^\dagger \hat{L}^\dagger \sigma_3 \Psi$$

$$= \langle \hat{L} \rangle_\Phi \quad \text{falls} \quad \hat{L}^\dagger \sigma_3 = \sigma_3 \hat{L} \quad \square$$

Bem: ist $\hat{O}$ Φ -hermitisch so ist $\hat{\bar{O}} \equiv \sigma_3 \hat{O}$ im eigentlichen Sinne hermitisch

$$\hat{\bar{O}}^\dagger = (\sigma_3 \hat{O})^\dagger = \hat{O}^\dagger \sigma_3 = \sigma_3 \hat{O} = \hat{\bar{O}} \quad \square$$

- Observable sind Φ -hermitesche Operatoren
- Dynamik

$$\Psi(t) = e^{-i\hat{H}t/\hbar} \Psi(0)$$

$$i\hbar \partial_t \Psi(t) = \hat{H} \Psi(t)$$

$$\hat{S}(t) \equiv e^{-i\hat{H}t/\hbar} \text{ ist } \Phi\text{-unitär}$$

$$\hat{S}^\dagger = \mathcal{G}_3 \left(e^{-i\hat{H}t/\hbar} \right)^\dagger \mathcal{G}_3$$

$$= \mathcal{G}_3 e^{+i\hat{H}^\dagger t/\hbar} \mathcal{G}_3$$

$$= \mathcal{G}_3 \left[1 + i \frac{\hat{H}^\dagger t}{\hbar} + \left(\frac{it}{\hbar} \right)^2 \frac{1}{2!} \hat{H}^{\dagger 2} + \dots \right] \mathcal{G}_3$$

$$= \left[1 + \frac{i\hat{H}t}{\hbar} + \left(\frac{+it}{\hbar} \right)^2 \frac{1}{2!} \hat{H}^2 + \dots \right]$$

$$= \hat{S}^{-1} \quad \square$$

Frage: Sind alle Φ -hermiteschen Operatoren Observable einer relativistischen Eintheilchenquantenmechanik?

Zur Erinnerung: Lösungen der KG-G mit pos. Frequenz
 $\rightarrow$ Teilchen

Lösungen der KG-G mit neg. Frequenz
 $\rightarrow$ Antiteilchen

⇒ wenn Einteilchenbild aufrecht erhalten werden soll dürfen nur Operatoren betrachtet werden, die positiv und negativ Frequenzzustände nicht mischen

Def: Seien $\mathcal{H}_{(+)} \subset \mathcal{H}$ die Räume der Zustände positiver/negativer Frequenz. Ein Operator $\hat{O}$ heißt wahrer Einteilchenoperator (gerade) gilt

$$\langle \psi_{(+)} | \hat{O} | \psi'_{(-)} \rangle = 0 \quad \forall \psi_{(+)} \in \mathcal{H}_{(+)}, \psi'_{(-)} \in \mathcal{H}_{(-)}$$

Bsp1: • wahre Einteilchenoperatoren sind

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \frac{\hbar^2}{2m} \Delta + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} m c^2$$

$$\vec{\hat{p}} = \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}$$

• kein wahrer Einteilchenoperator ist dagegen $\vec{\hat{x}}$

Bew: Ü 1 A.

Def: Ein Operator $\hat{O}$ heißt ungerade falls gilt

$$\langle \psi_{(+)} | \hat{O} | \psi'_{(+)} \rangle = \langle \psi_{(-)} | \hat{O} | \psi'_{(-)} \rangle = 0$$

$$\forall \psi_{(\pm)}, \psi'_{(\pm)} \in \mathcal{H}_{(\pm)}$$

Jeder Operator kann in einen geraden und einen ungeraden Teil zerlegt werden

$$\hat{O} = [\hat{O}] + \{\hat{O}\}$$

konstruiert man den Operator $[\vec{x}]$ so findet man daß seine Eigenzustände die asymptotische Form

$$\Psi_{\vec{x}}(\vec{x}') \sim \frac{1}{z^{7/4}} e^{-z} \quad z = \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{\hbar/m_0 c}$$

und nicht $\delta(\vec{x} - \vec{x}')$ sind. Die Eigenzustände des EinTeilchenoperators sind also über die Comptonwellenlänge

$$|\vec{x} - \vec{x}'| \sim \frac{\hbar}{m_0 c} = \lambda_c$$

ausgeschmiert. Relativistisch macht es also keinen Sinn von dem Ort eines Teilchens mit Präzision besser als λ_c zu sprechen.