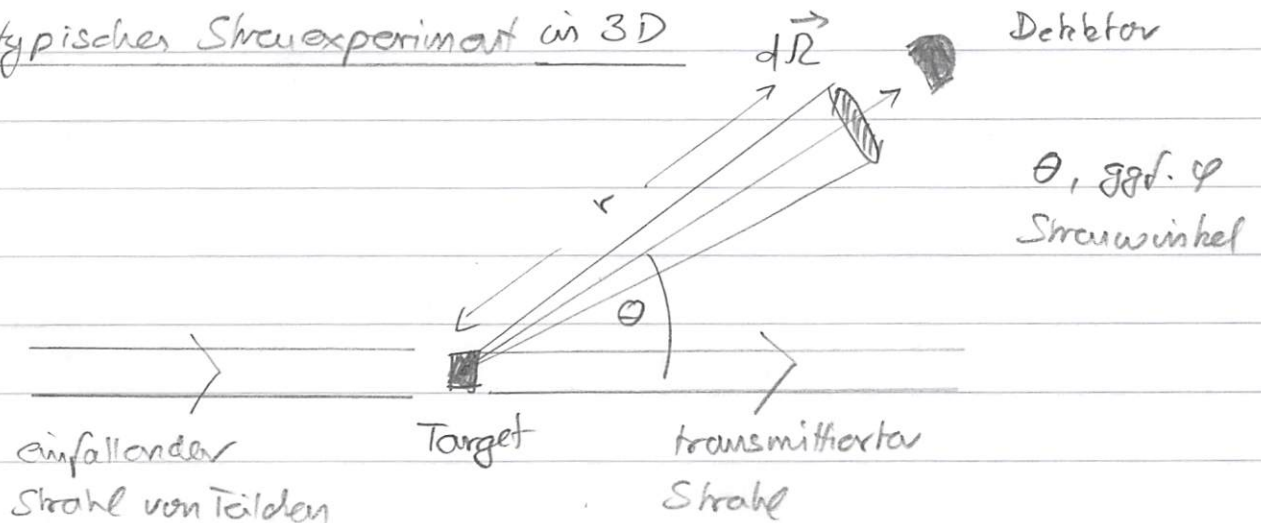


III. Streutheorie

III. 1. Grundlegende Begriffe

typisches Streuexperiment in 3D



Detektorfläche $d\vec{S} = r^2 d\vec{\Omega}$ $d\vec{\Omega} = \vec{n} d\Omega$

Teilchen die durch dS pro Zeiteinheit hindurchfliegen

$$dN = \vec{j}_s \cdot d\vec{S} = \vec{j}_s \cdot d\vec{\Omega} r^2$$

differentieller Streuquerschnitt

$$d\sigma = \frac{dN}{|\vec{j}_{in}|} = \frac{r^2 \vec{j}_s \cdot d\vec{\Omega}}{|\vec{j}_{in}|} = \frac{r^2 |\vec{j}_s| r}{|\vec{j}_{in}|} d\Omega$$

totaler Streuquerschnitt

$$\sigma = \int d\sigma = \int_{4\pi} \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$$

Streuamplitude

► Fragestellung bei Streuexperiment:

Ziel ist Streupotential endlicher Reichweite $V(\vec{r})$

um $\vec{r} \rightarrow 0$ (O.B.d.A.)

$\Rightarrow$ für große $r = |\vec{r}|$ Lösungen der SGL
wie freie Lösungen d.h. ohne V

- einfallender Teilchenstrahl: freie Teilchen in z-Richtung (O.B.d.A.)

Eigendistributionen von $H = \frac{\vec{p}^2}{2m}$, $\vec{p}$

$$\varphi_{in,k} \sim e^{ikz}$$

$$E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

- asymptotisches Verhalten der gestreuten Wellenfunktion

(i) isotrope Streuung: $P_\varphi = P_\theta = 0$ $P_r \neq 0$

$$\left(\frac{\hat{p}_r^2}{2m} \right) \varphi_k = E_k \varphi_k$$

siehe QM I: $\varphi_k(r) = j_0(kr) = \frac{\sin kr}{kr} = \frac{1}{2i} \left(\frac{e^{ikr}}{kr} - \frac{e^{-ikr}}{kr} \right)$

$$\varphi_{s,k}^{(iso)} \sim \frac{e^{ikr}}{r}$$

(ii) anisotrope Streuung

$$\varphi_{s,k} \sim \frac{f_k(\vartheta, \varphi) e^{ikr}}{r}$$

$f_k(\vartheta, \varphi)$ heißt
Streuamplitude

oft: Target Zentralpotential $\Rightarrow$ Zylindersymmetrie

$$f_k(\vartheta, \varphi) = f_k(\vartheta)$$

Zshg. diff. Streuquerschnitt und Streuamplitude

$$\vec{j}_s = \frac{\hbar}{2m i} (\varphi_s^* \vec{\nabla} \varphi_s - \varphi_s \vec{\nabla} \varphi_s^*)$$

$$j_{s,r} = \vec{e}_r \cdot \vec{j}_s = \frac{\hbar}{2m i} \left(\varphi_s^* \frac{\partial}{\partial r} \varphi_s - \varphi_s \frac{\partial}{\partial r} \varphi_s^* \right)$$

$$= \frac{\hbar k}{m r^2} |f_k(\vartheta, \varphi)|^2$$

$$\vec{j}_{in} = \frac{\hbar k}{m} \vec{e}_z$$

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r^2 j_{s,r}}{j_{in}} = |f_k(\vartheta, \varphi)|^2}$$

III.2. Streuung am Zentralpotential und Partialwellenzerlegung

betrachten Zentralpotential $V(\vec{r}) = V(r)$ mit

$$(i) \quad r V(r) \rightarrow M \quad r \rightarrow 0 \quad |M| < \infty$$

$$(ii) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r^{1+\varepsilon} V(r) = 0 \quad \varepsilon > 0$$

Bem: • nicht gegeben für Coulomb-Potential!
• Begründung später

asymptotische Form der stationären Wellenfunktion

$$(*) \quad \varphi_k(r, \vartheta) = e^{ikz} + \frac{f_k(\vartheta) e^{ikr}}{r}$$

- für $V=0$ ist φ_k Lösg. der stationären radialen SG

$$\varphi_k = \sum_{\ell=0}^{\infty} C_{\ell} R_{k\ell}(r) P_{\ell}(\cos\vartheta)$$

$$\left[\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + k^2 \right] R_{k\ell}(r) = 0$$

$$R_{k\ell}(r) \sim j_{\ell}(kr) \quad \text{sphärische Besselfunktionen}$$

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x} \quad j_1(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x} \quad j_2(x) = \left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x} \right) \sin x - \frac{3 \cos x}{x^2}$$

$$x \rightarrow \infty \quad j_{\ell}(x) \sim \frac{1}{x} \sin\left(x - \frac{\ell\pi}{2}\right)$$

d.h.

$$R_{k\ell}(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{1}{kr} \sin\left(kr - \frac{\ell\pi}{2}\right)$$

- für $V \neq 0$ sollte das asymptotische Verhalten der Wellenfunktion ähnlich sein ggf. bis auf eine Phasenverschiebung δ_{ℓ}

$$(**) \quad \varphi_k(r, \vartheta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} C_{\ell} \frac{\sin(kr - \frac{\ell\pi}{2} + \delta_{\ell})}{kr} P_{\ell}(\cos\vartheta)$$

Partialwellenzersetzung

δ_e - Streuphasen

Zshg. zwischen $f(\vartheta)$ und Partialwellen Gl. (*) $\leftrightarrow$ Gl. (**)

$$e^{ikz} = e^{ikr \cos \vartheta} = \sum_{\substack{\text{ü.A.} \\ \ell=0}}^{\infty} (2\ell+1) i^\ell j_\ell(kr) P_\ell(\cos \vartheta)$$

$$\xrightarrow{r \rightarrow \infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) i^\ell \frac{\sin(kr - \ell\pi/2)}{kr} P_\ell(\cos \vartheta)$$

$r \rightarrow \infty$:

$$e^{ikz} + \frac{f_k(\vartheta) e^{ikr}}{r} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) i^\ell \frac{\sin(kr - \ell\pi/2)}{kr} P_\ell(\cos \vartheta) + f_k(\vartheta) \frac{e^{ikr}}{r}$$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} C_\ell \frac{\sin(kr - \frac{\ell\pi}{2} + \delta_\ell)}{kr} P_\ell(\cos \vartheta)$$

$\Rightarrow \dots \Rightarrow$

$$C_\ell = i^\ell (2\ell+1) e^{i\delta_\ell}$$

$$f_k(\vartheta) = \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{C_\ell}{i^\ell} \sin \delta_\ell P_\ell(\cos \vartheta)$$

Partialwellenzersetzung der Streuamplitude

aus Orthogonalität der $P_\ell(\cos \vartheta) \Rightarrow$

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \sin^2 \delta_\ell$$

setzt man $\delta=0$

$$f_k(0) = \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \sin \delta_{\ell} \cos \delta_{\ell} \\ + \frac{i}{k} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \sin^2 \delta_{\ell}$$

$\Rightarrow$

$$\sigma = \frac{4\pi}{k} \operatorname{Im} [f_k(0)]$$

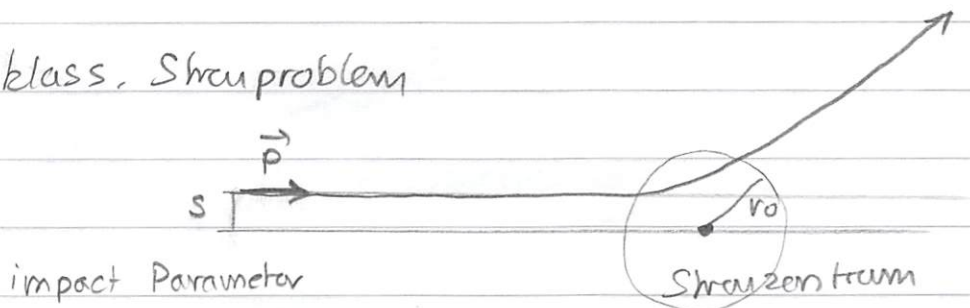
optisches Theorem

Zshg. zwischen Vorwärtsschrauphase und Streuquerschnitt

III.3. Niederenergiestreuung

Die Partialwellenzersetzung ist besonders nützlich im Falle der Streuung mit niedriger Energie

- klass. Streuproblem



Drehimpuls: $L = sp$

falls Streupotential effektiv vernachlässigbar für $r > r_0$

$\Rightarrow$ nur Effekt für

$$L < r_0 p$$

- g.m. Streuproblem

$$L = \hbar \ell(\ell+1) \sim \hbar \ell \quad p = \hbar k$$

$$\ell < r_0 k$$

für niedrige Energien $\hbar^2 k^2 / 2m$ nur noch $l=0$ Term relevant

S-Wellenstreuung

in S-Wellen Näherung

$$f_k(\vartheta) = \frac{1}{k} e^{i\delta_0} \sin \delta_0$$

isotrop!

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{k^2} \sin^2 \delta_0 \approx \frac{\delta_0^2}{k^2}$$

S-Wellenstreuungslänge

$$a_0 \equiv - \lim_{k \rightarrow 0} f_k(\vartheta) \approx - \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\delta_0}{k}$$

$$d\sigma = a_0^2 d\Omega$$

in S-Wellennäherung

$$\sigma = 4\pi a_0^2$$

Niederenergiestreuung an einem hinreichend schwachen und räumlich lokalisierten aber ansonsten beliebigen Potential $V(r)$ ist durch nur einen Parameter a_0 (bzw. δ_0) charakterisiert

Beispiel 1: • Streuung an attraktivem sphärischen Potentialtopf

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & r < a \\ 0 & r > a \end{cases} \quad V_0, a > 0$$

Niedrigenergiestreuung $l=0$

$\Rightarrow$

$$\left[\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r + k^2 - \frac{2m V(r)}{\hbar^2} \right] R_{k0} = 0$$

$$\underline{r < a} \quad \frac{\hbar^2 k_1^2}{2m} = E + V_0 \quad E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

$$u_1 = r R$$

$$\frac{d^2 u_1}{dr^2} + k_1^2 u_1 = 0 \Rightarrow u_1 = A \sin k_1 r$$

$$\underline{r > a} \quad u_2 = B \sin(kr + \delta_0) \quad E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

Übergangsbedingungen bei $r=a$:

$$\hat{p}_r^2 R(r) = -\hbar^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial}{\partial r} u \right]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial r} \text{ kontinuierlich} \quad u \text{ kontinuierlich}$$

$\rightarrow \checkmark$

$$\frac{du}{dr} \text{ kontinuierlich}$$

⇒

$$k_1 \cot k_1 a = k \cot (ka + \delta_0) \xrightarrow{k \rightarrow 0, \delta_0 \rightarrow 0} \approx \frac{k}{ka + \delta_0}$$

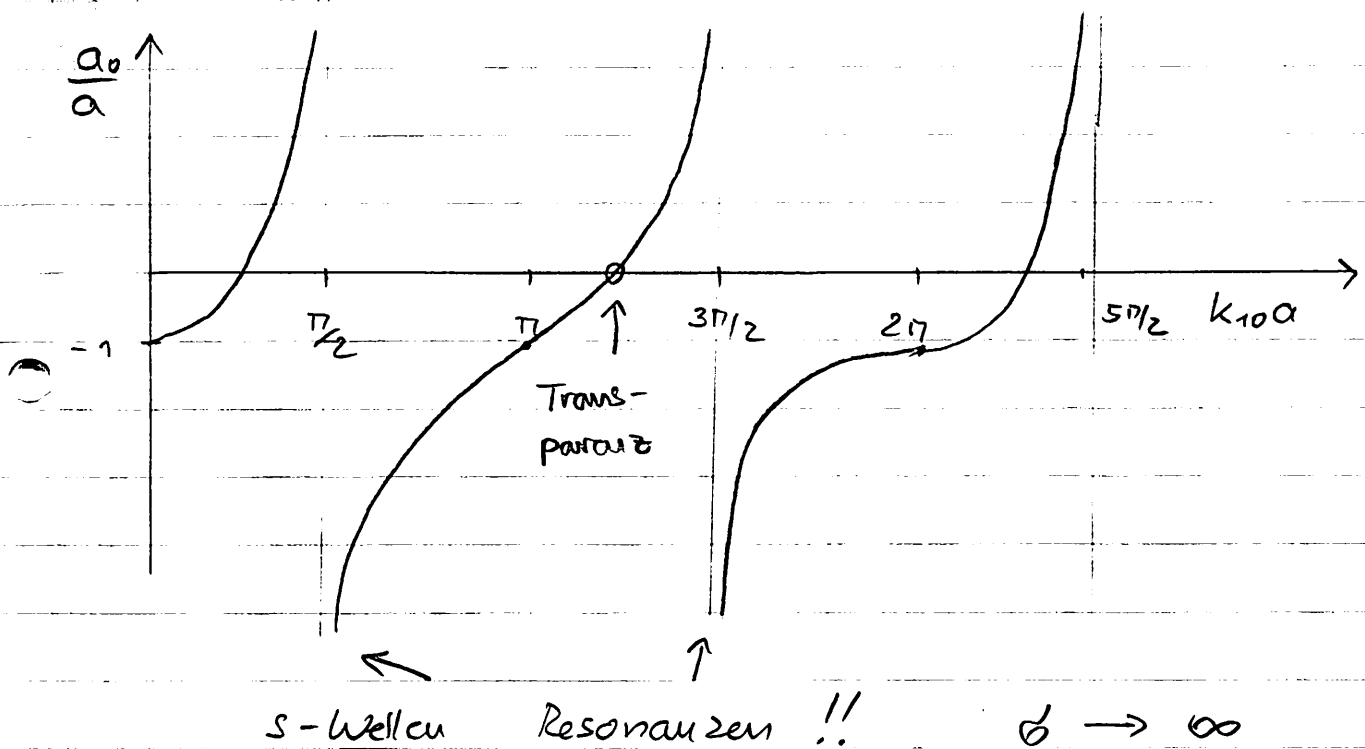
$$\underline{\underline{\delta_0 = ka \left(\frac{\tan k_1 a}{k_1 a} - 1 \right)}}$$

s-Wellenstrahlänge

$$\underline{\underline{a_0 = a \left(\frac{\tan k_{10} a}{k_{10} a} - 1 \right)}}$$

$$k_{10} = \sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar}}$$

$$\underline{\underline{\sigma = 4\pi a^2 \left(\frac{\tan k_{10} a}{k_{10} a} - 1 \right)^2}}$$



an den Resonanzstellen ist s-Wellennäherung für σ nicht mehr gut

$$k_1 a = (2n+1) \pi/2$$

s-Wellen resonanzen

Übergangsbedingung

$$\cot k_1 a = 0$$

$$\cot(ka + \delta_0) = 0 \quad ka \ll 1$$

$$\Rightarrow \cos \delta_0 = 0 \quad \sin \delta_0 \approx 1$$

$$\frac{dG}{dk} = \frac{1}{k^2} \sin^2 \delta_0 \approx \frac{1}{k^2}$$

$$G = \frac{4\pi}{k^2}$$

Frage: Woher kommen die Resonanzen?

Antwort: Auftreten gebundener Zustände mit $E = 0$

Beispiel 2: • repulsiver sphärischer Potentialtopf

$$V(r) = \begin{cases} +V_0 & r < a \\ 0 & r > a \end{cases} \quad V_0, a > 0$$

$$u_1 = A \sinh \kappa r \quad \frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m} = V_0 - E > 0$$

$\Rightarrow \dots \Rightarrow$

$$G = 4\pi a^2 \left(\frac{\tanh \kappa a}{\kappa a} - 1 \right)^2$$

keine Resonanzen; $V_0 \rightarrow \infty$

$$G = 4\pi a^2$$

III.4. Streuung am Coulombpotential

exakt lösbares Problem

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta - \frac{ze^2}{r} \quad z \in \mathbb{Z}$$

gesucht Streuzustände, man beachte $V(r) r^{1+\varepsilon} \rightarrow \infty$, $\varepsilon > 0$
 $r \rightarrow \infty$

$$H \phi = E \phi \quad E > 0$$

definieren $\eta \equiv \frac{mze^2}{\hbar^2 k}$ $k \equiv |\vec{k}| = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE}$

$$\leadsto \left(-\Delta - \frac{2\eta k}{r} \right) \psi_k = k^2 \psi_k$$

Ansatz:

$$\psi_k(\vec{r}) = e^{ikz} g(\xi) \quad \xi = ikr(1 - \cos\theta)$$

$\Rightarrow \dots \Rightarrow$

$$\xi g''(\xi) + (1-\xi)g'(\xi) - i\eta g(\xi) = 0$$

konfluent hypergeometrische Differentialgleichung wie
bei gebundenen Zstd. des Coulombpotentials

bei $\xi=0$ ($\vec{r}=0$) reguläre Lösungen:

$$g(\xi) \sim {}_1F_1(i\eta; 1; \xi)$$

⇒

$$\psi_k(\vec{r}) = \underbrace{e^{\frac{\pi\eta}{2}} \Gamma(1-i\eta)}_{\text{geeignete Konstanten}} e^{i\vec{k}\vec{z}} {}_1F_1(i\eta; 1; \frac{2i\eta}{kz})$$

geeignete Konstanten

$\Gamma(x)$ Euler-Gammafunktion

für $r \rightarrow \infty$ und $\vartheta \neq 0$ mit $\vec{r} = kr$

$$\psi_k(\vec{r}) \sim e^{i\vec{k}\vec{z}} e^{-i\eta \ln[kr(1-\cos\vartheta)]} + \frac{f_k(\vartheta)}{r} e^{ikr} e^{i\eta \ln(kr)}$$

asymptotischer
Strahlzustand
des Coulomb-
potentials

mit

$$f_k(\vartheta) = \frac{\Gamma(1-i\eta)}{\Gamma(1+i\eta)} \frac{\eta}{k} \left(2 \sin \frac{\vartheta}{2} \right)^{-1+i\eta}$$

Man beachte die logarithmischen Korrekturen in den Exponenten!

Mit dem Zshg. zwischen Strahlamplituden und differentiellen Streuquerschnitt (der hier eigentlich mit Vorsicht zu genießen ist, da er für kurzreichweitige Potentiale abgeleitet wurde) findet man

$$\frac{d\sigma_E}{d\Omega} = \left(\frac{Ze^2}{4E \sin^2 \frac{\vartheta}{2}} \right)^2$$

Rutherford'scher
Streuquerschnitt

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

$$2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} = 1 - \cos\vartheta$$

III. 5. Elemente der formalen Streutheorie:

Lippmann-Schwinger Gleichung und Bornsche Reihe

betrachten Hamiltonoperator mit Streupotential $\hat{V}$

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V} e^{-\varepsilon|t|/\hbar} \quad \varepsilon > 0$$

↑
garantiert $\hat{H} = \hat{H}_0$ bei $|t| \rightarrow \infty$
und wirkt konvergenzergend

Schrödingergleichung im WW-Bild mit $t=0$; WW Bild = SBild

$$|\varphi_{\pm}(t)\rangle = e^{i\hat{H}_0 t/\hbar} |\varphi_{\pm}(t)\rangle$$

$$\hat{V}_{\pm}(t) = e^{i\hat{H}_0 t/\hbar} \hat{V} e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar} \quad (\varepsilon=0)$$

$$(*) \quad i\hbar \frac{d}{dt} |\varphi_{\pm}(t)\rangle = \hat{V}_{\pm}(t) |\varphi_{\pm}(t)\rangle$$

formale Lösg von (*)

$$|\varphi_{\pm}(t)\rangle = |\varphi_{\pm}(t_0)\rangle - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dz \hat{V}_{\pm}(z) |\varphi_{\pm}(z)\rangle$$

$$\text{mit } e^{-\varepsilon|t|/\hbar} \quad \hat{V}_{\pm}(t) \rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow \pm\infty$$

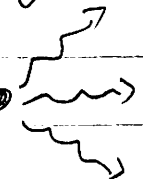
d.h.

$$|\varphi_{\pm}(t \rightarrow \pm\infty)\rangle = |\phi^{(\pm)}\rangle \quad \text{freie Teilchenzustände}$$

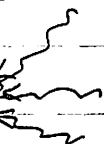
mit $t_0 = \pm \infty$

$$|\psi_I^{(\pm)}(t)\rangle = |\phi^{(\pm)}\rangle - \frac{i}{\hbar} \int_{\mp\infty}^t dz \hat{V}_I(z) |\psi_I^{(\pm)}(z)\rangle$$

• $|\psi_I^{(+)}(t)\rangle$ retardierte Lösung ("in" Lösung)

$$|\psi_I^{(+)}(t \rightarrow -\infty)\rangle = |\phi^{(+)}\rangle \quad |\phi^{(+)}\rangle \rightsquigarrow \text{diagram}$$


• $|\psi_I^{(-)}(t)\rangle$ avancierte Lösung ("out" Lösung)

$$|\psi_I^{(-)}(t \rightarrow +\infty)\rangle = |\phi^{(-)}\rangle \quad |\phi^{(-)}\rangle \leftarrow \text{diagram}$$


wählen $t=0$ (WW-Bild = Schr.-Bild) und fordern

$$|\psi_I^{(\pm)}(t=0)\rangle = |\psi^{(\pm)}(t=0)\rangle = |\psi^{(\pm)}\rangle$$

$$\hat{H} |\psi^{(\pm)}\rangle = E |\psi^{(\pm)}\rangle$$

gesuchte

EZ der vollen

Hamiltonoperatoren

$\Rightarrow$

$$|\psi^{(\pm)}\rangle = |\phi^{(\pm)}\rangle - \frac{i}{\hbar} \int_{\mp\infty}^0 dz e^{i\hat{H}_0 z/\hbar} \hat{V} e^{-\epsilon|z|/\hbar} e^{-i\hat{H}_0 z/\hbar} |\psi_I^{(\pm)}(z)\rangle$$

mit

$$|\psi_I^{(\pm)}(z)\rangle = e^{i\hat{H}_0 z/\hbar} |\psi^{(\pm)}\rangle = e^{i\hat{H}_0 z/\hbar} e^{-i\hat{H} z/\hbar} |\psi^{(\pm)}\rangle$$

$\Rightarrow$

$$|\psi^{(\pm)}\rangle = |\phi^{(\pm)}\rangle - \frac{i}{\hbar} \int_{\mp\infty}^0 dz e^{i\hat{H}_0 z/\hbar} \hat{V} e^{-\epsilon|z|/\hbar} e^{-i\hat{H} z/\hbar} |\psi^{(\pm)}\rangle$$

unter Benutzung der Eigenwertgleichung $\hat{H} |\psi^{(\pm)}\rangle = E |\psi^{(\pm)}\rangle$ ergibt sich

$$|\psi^{(\pm)}\rangle = |\phi^{(\pm)}\rangle - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^0 dz e^{i\hat{H}_0 z/\hbar} \hat{V} e^{-\varepsilon|z|/\hbar} e^{-iEt/\hbar} |\psi^{(\pm)}\rangle$$

Integralgleichung für $|\psi^{(\pm)}\rangle$

Def: Greensche Operatoren

$$\hat{G}_0^{(\pm)} \equiv -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^0 dz \exp \left\{ \frac{i(\hat{H}_0 - E \mp i\varepsilon) \tau}{\hbar} \right\}$$

$$\hat{G}_0^{(\pm)} = -\frac{1}{\hat{H}_0 - E \mp i\varepsilon}$$

$\pm i\varepsilon$ wichtig da $(\hat{H}_0 - E)^{-1}$ singulär!

damit

$$\begin{aligned} |\psi^{(\pm)}\rangle &= |\phi^{(\pm)}\rangle + \hat{G}_0^{(\pm)} \hat{V} |\psi^{(\pm)}\rangle \\ &= |\phi^{(\pm)}\rangle - \frac{1}{\hat{H}_0 - E \mp i\varepsilon} \hat{V} |\psi^{(\pm)}\rangle \end{aligned}$$

Lippmann-Schwinger Gleichung

→

Gleichung zur selbstkonsistenten Bestimmung der Streuzustände $|\psi^{(\pm)}\rangle$

Iteration der Lippmann-Schwinger Gleichung liefert die
Bornsche Störreihe

$$|\psi^{(\pm)}\rangle = \left[1 + \hat{G}_0^{(\pm)} \hat{V} + \hat{G}_0^{(\pm)} \hat{V} \hat{G}_0^{(\pm)} \hat{V} + \hat{G}_0^{(\pm)} \hat{V} \hat{G}_0^{(\pm)} \hat{V} \hat{G}_0^{(\pm)} \hat{V} + \dots \right] |\phi^{(\pm)}\rangle$$

1. Bornsche Näherung

$$|\psi^{(\pm)}\rangle \approx |\phi^{(\pm)}\rangle + \hat{G}_0^{(\pm)} \hat{V} |\phi^{(\pm)}\rangle$$

Ortdarstellung der Lippmann-Schwinger Gleichung

da $\hat{H}_0$ in Ortdarstellung Differentialoperator
 $\rightarrow$ Vermutung $(\hat{H}_0 - E \mp i\varepsilon)^{-1}$ Integraloperator

$$\frac{1}{\hat{H}_0 - E \mp i\varepsilon} \psi(\vec{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{r}' \hat{G}_0^{(\pm)}(\vec{r}, \vec{r}') \psi(\vec{r}')$$

$$\hat{G}_0^{(\pm)}(\vec{r}, \vec{r}') = \langle \vec{r} | \hat{G}_0^{(\pm)} | \vec{r}' \rangle = ?$$

es gilt in O. Darst.

$$-(\hat{H}_0 - E \mp i\varepsilon) \hat{G}_0^{(\pm)}(\vec{r}, \vec{r}') = \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}')$$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{\vec{r}} - E \mp i\varepsilon \right) \hat{G}_0^{(\pm)}(\vec{r}, \vec{r}') = -\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}')$$

d.h. $\hat{G}_0^{(\pm)}$ Grüne Funktion der Helmholtzgleichung
 - 47 -

-(A)-

$$\rightarrow \text{Residuumintegration} \quad = -\frac{\lambda_m}{2m} \frac{1}{x} \int_{-\infty}^{\infty} dq \frac{q^{2-k_2 \pm i\epsilon}}{q e^{iqx}}$$

$$= -\frac{\lambda_m}{2m} \frac{x_2^{(42)} 2^4!}{x_2^{(24)} 2^4!} \int_{-\infty}^0 dq \frac{q^{2-k_2 \pm i\epsilon}}{x b_1 e^{iqx}} + \int_0^{\infty} dq \frac{q^{2-k_2 \pm i\epsilon}}{x b_1 e^{iqx}}$$

$$= -\frac{\lambda_m}{2m} \frac{x_2^{(42)} 2^4!}{x_2^{(24)} 2^4!} \int_{-\infty}^0 dq \frac{q^{2-k_2 \pm i\epsilon}}{x b_1 e^{iqx} - x b_1 e^{-iqx}}$$

$$= -\frac{\lambda_m}{2m} \frac{x_2^{(42)} 2^4!}{x_2^{(24)} 2^4!} \int_{-\infty}^0 dq \int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{q^{2-k_2 \pm i\epsilon}}{e^{iqx} x b_1}$$

$$\frac{\lambda_m}{2m} = \lambda$$

$$\lambda = \lambda - \lambda$$

$$= -\frac{\lambda_m}{2m} \frac{x_2^{(42)} 2^4!}{x_2^{(24)} 2^4!} \int_{-\infty}^0 dq \frac{q^{2-k_2 \pm i\epsilon}}{x b_1 e^{iqx}}$$

$$= -\frac{\lambda_m}{2m} \frac{x_2^{(42)} 2^4!}{x_2^{(24)} 2^4!} \int_{-\infty}^0 dq \frac{q^{2-k_2 \pm i\epsilon}}{e^{iqx} (1-x)}$$

$$E = \frac{\lambda_m}{2m} k_2$$

$$= -\int_{-\infty}^0 dq \frac{q^{2-k_2 \pm i\epsilon}}{1} \langle q | \vec{p} \rangle \langle \vec{p} | q \rangle$$

$$= -\int_{-\infty}^0 dq \frac{q^{2-k_2 \pm i\epsilon}}{1} \langle q | \vec{p} \rangle \langle \vec{p} | q \rangle$$

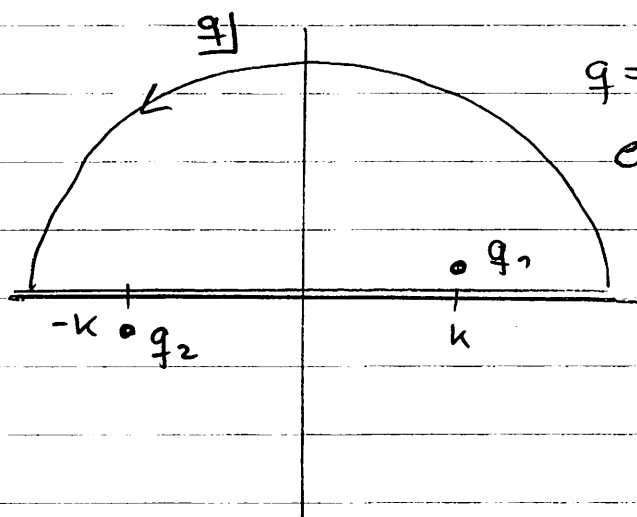
$$= -\langle \vec{p} | \frac{H_0 - E \pm i\epsilon}{1} | \vec{p} \rangle = -\langle \vec{p} | \vec{p} \rangle \langle \vec{p} | \vec{p} \rangle$$

Pole
1. Ordnung

$$q^2 - k^2 - i\tilde{\epsilon} = (q - k - i\tilde{\epsilon})(q + k + i\tilde{\epsilon})$$

$$= q^2 - k^2 - 2ik\tilde{\epsilon} + \cancel{\tilde{\epsilon}^2} \quad \tilde{\epsilon} > 0$$

$$q_1 = k + i\tilde{\epsilon} \quad q_2 = -k - i\tilde{\epsilon}$$



$$q = q' + iq'' \quad q'' > 0 \quad x > 0$$

$$e^{iqx} = e^{iq'x} e^{-q''x}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq \frac{q e^{iqx}}{q^2 - k^2 - i\tilde{\epsilon}} = 2\pi i \sum_{q_i} \text{Res} \left\{ \frac{q e^{iqx}}{q^2 - k^2 - i\tilde{\epsilon}} \mid q_{1,2} \right\}$$

$$= 2\pi i \lim_{q \rightarrow q_1} (q - q_1) \frac{q e^{iqx}}{q^2 - k^2 - i\tilde{\epsilon}}$$

$$= 2\pi i \frac{(k + i\tilde{\epsilon}) e^{i(k + i\tilde{\epsilon})x}}{2k + 2i\tilde{\epsilon}} = \pi i e^{ikx}$$

$$G_0^{(+)}(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{2m}{\hbar^2} \frac{e^{ik|\vec{r} - \vec{r}'|}}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|}$$

analog

$$G_0^{(-)}(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{2m}{\hbar^2} \frac{e^{-ik|\vec{r} - \vec{r}'|}}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|}$$

das liefert die Ortsdarstellung der Lippmann-Schwinger Gleichung

$$\psi_k^{(\pm)}(\vec{r}) = \phi_k^{(\pm)}(\vec{r}) - \frac{2m}{\hbar^2} \int d^3\vec{r}' \frac{e^{\pm i k |\vec{r} - \vec{r}'|}}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} V(\vec{r}') \psi_k^{(\pm)}(\vec{r}')$$

Integralgleichung

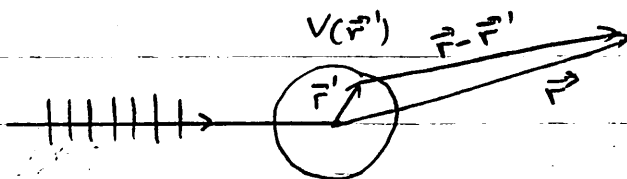
Bornsche Reihe in Ortsdarstellung

$$\begin{aligned} \psi_k^{(\pm)}(\vec{r}) = & \phi_k^{(\pm)}(\vec{r}) - \frac{2m}{\hbar^2} \int d^3\vec{r}' \frac{e^{\pm i k |\vec{r} - \vec{r}'|}}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} V(\vec{r}') \phi_k^{(\pm)}(\vec{r}') \\ & + \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^2 \int d^3\vec{r}' \int d^3\vec{r}'' \frac{e^{\pm i k |\vec{r} - \vec{r}'|}}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} V(\vec{r}') \frac{e^{\pm i k |\vec{r}' - \vec{r}''|}}{4\pi |\vec{r}' - \vec{r}''|} \\ & V(\vec{r}'') \phi_k^{(\pm)}(\vec{r}'') \\ & - + \dots \end{aligned}$$

Streuamplitude

$$\phi_k^{(+)}(\vec{r}) = e^{i k z}$$

$$\psi_k^{(+)}(\vec{r}) = e^{i k z} - \frac{2m}{\hbar^2} \int d^3\vec{r}' \frac{e^{i k |\vec{r} - \vec{r}'|}}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} V(\vec{r}') \psi_k^{(+)}(\vec{r}')$$



asymptotisch

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')} \\ = \sqrt{r^2 - r'^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}'} \simeq r - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r}$$

$$\frac{e^{ik|\vec{r} - \vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|} \longrightarrow \frac{e^{ikr}}{4\pi r} e^{-ik\frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r}}$$

$\Rightarrow$

$$f_k(\vartheta) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3\vec{r}' e^{-ik\frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r}} V(\vec{r}') \psi_k^{(+)}(\vec{r}')$$

$$\vec{k}' \equiv k \frac{\vec{r}}{r} \quad \vec{k} \longrightarrow \cdot \quad \vec{r} \sim \vec{b}'$$

$$|\vec{b}'| = k' = k$$

$$f_k(\vartheta) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3\vec{r}' e^{-i\vec{b}' \cdot \vec{r}'} V(\vec{r}') \psi_k^{(+)}(\vec{r}')$$

III.6. Die T-Matrix und Bornsche Näherung

- Lippmann-Schwinger Gleichung

$$|\psi^{(\pm)}\rangle = |\phi^{(\pm)}\rangle - \frac{1}{\hat{H}_0 - E \mp i\epsilon} \hat{V} |\psi^{(\pm)}\rangle$$

Problem: Lösg $|\psi^{(\pm)}\rangle$ hängt von der Wahl von $|\phi^{(\pm)}\rangle$ ab und nicht nur von $\hat{G}^{(\pm)} = (\hat{H}_0 - E \mp i\epsilon)^{-1}$ und $\hat{V}$!

• Bornsche Reihe:

$$| \psi_k^{(\pm)} \rangle = \left[1 + \hat{G}_0^{(\pm)} \hat{V} + \hat{G}_0^{(\pm)} \hat{V} \hat{G}_0^{(\pm)} \hat{V} + \hat{G}_0^{(\pm)} \hat{V} \hat{G}_0^{(\pm)} \hat{V} \hat{G}_0^{(\pm)} \hat{V} + \dots \right] | \phi_k^{(\pm)} \rangle$$

das Streupotential $\hat{V}$ taucht in der Form

$$\hat{V} + \hat{V} \hat{G}_0^{(\pm)} \hat{V} + \hat{V} \hat{G}_0^{(\pm)} \hat{V} \hat{G}_0^{(\pm)} \hat{V} + \dots$$

auf,

$\Rightarrow$ Transformatrix $\hat{T}^{(\pm)}$

$$\hat{T}^{(\pm)} = \hat{V} + \hat{V} \hat{G}_0^{(\pm)} \hat{V} + \hat{V} \hat{G}_0^{(\pm)} \hat{V} \hat{G}_0^{(\pm)} \hat{V} + \dots$$

$$| \psi_k^{(\pm)} \rangle = [1 + \hat{G}_0^{(\pm)} \hat{T}^{(\pm)}] | \phi_k^{(\pm)} \rangle$$

$$\begin{aligned} \hat{T}^{(\pm)} &= \hat{V} + \hat{V} \hat{G}_0^{(\pm)} \hat{T}^{(\pm)} \\ &= \hat{V} - \hat{V} \frac{1}{\hat{H}_0 - E \mp i\epsilon} \hat{T}^{(\pm)} \end{aligned}$$

Lippman-Schwinger
Gleichung für
T-Matrix

Bem: $\hat{T}$ in Ortsdarstellung nicht lokal!

$$T^{(\pm)}(\vec{r}, \vec{r}') = V(\vec{r}) \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') + \int d^3\vec{r}'' V(\vec{r}) G_0^{(\pm)}(\vec{r}, \vec{r}'') T^{(\pm)}(\vec{r}'', \vec{r}')$$

Bornsche Näherung

$$\hat{T} = \hat{V} + \hat{V} \hat{G}_0^{(+)} \hat{V} + \hat{V} \hat{G}_0^{(+)} \hat{V} \hat{G}_0^{(+)} \hat{V} + \dots$$

$$= \hat{V} \sum_{n=0}^{\infty} \left(+ \hat{G}_0^{(+)} \hat{V} \right)^n$$

falls $\hat{G}_0^{(+)} \hat{V}$ klein $\Rightarrow$ näherungsweise Abbruch der Reihe

1. Bornsche Näherung

$$\hat{T}^{(\pm)} \approx \hat{V}$$

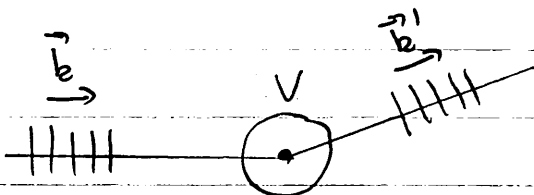
in 1. Bornscher Näherung ist $\hat{T}(\vec{r}, \vec{r}') = V(r) \delta(\vec{r} - \vec{r}')$ lokal!

$$|\varphi_k^{(\pm)}\rangle = |\psi_k^{(\pm)}\rangle + \hat{G}_0^{(\pm)} \hat{V} |\psi_k^{(\pm)}\rangle$$

Streuamplitude in 1. Bornscher Näherung (Orbdaustellung)

$$f_k^{(1)}(\vartheta) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3\vec{r}' e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{r}'} V(\vec{r}') \phi_k^{(\pm)}(\vec{r}')$$

$$f_k^{(1)}(\vartheta) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3\vec{r}' e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{r}'} V(\vec{r}') e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}'}$$



Korrespondenz zwischen einfallender ($\vec{k}$) und gestreuter ebener Welle ($\vec{k}'$)

$$f_k^{(1)}(\vartheta) = - \frac{m}{2\pi\hbar^3} (2\pi)^{3/2} \langle \vec{k}' | \hat{V} | \vec{k} \rangle$$

Speziell für Zentralpotential $V(\vec{r}') = V(r')$

Impulsübertrag: $\vec{q} \equiv \vec{k} - \vec{k}'$ $\tilde{\vartheta} = \angle(\vec{k}, \vec{r}')$

$$f_k^{(1)}(\vartheta) = - \frac{m}{2\pi\hbar^3} \int d^3\vec{r}' e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}'\cos\tilde{\vartheta}} V(r')$$

$$= - \frac{m}{\hbar^2} \int_0^\infty dr' r'^2 \int_{-1}^1 d\cos\tilde{\vartheta} e^{iqr'\cos\tilde{\vartheta}} V(r')$$

$$= - \frac{m}{\hbar^2} \int_0^\infty dr' r'^2 \frac{2\sin qr'}{qr'} V(r')$$

$$f_k^{(1)}(\vartheta) = - \frac{2m}{\hbar^2 q} \int_0^\infty dr' r' V(r') \sin qr'$$

Streukampli-
tude in
1. Born'scher
Näherung
für ein
Zentralpotential

$$q = |\vec{q}| = |(\vec{k} - \vec{k}')|$$

$$= \sqrt{k^2 + k'^2 - 2kk'\cos\vartheta} = k\sqrt{2(1-\cos\vartheta)}$$

$$q = 2k \sin \frac{\vartheta}{2}$$

Bspl: • das abgeschirmte Coulomb-Potential

$$V(r) = - \frac{Ze^2 \exp(-r/a)}{r}$$

Yukawa oder
Debye oder
Thomas-Fermi
Potential

$$f_n^{(1)}(\vartheta) = \frac{2mZe^2}{\hbar^2 q} \int_0^\infty dr' e^{-r'/a} \sin qr'$$

$$= \frac{2mZe^2}{\hbar^2 q} \int_0^\infty dr' \left[\frac{e^{-r'/a} e^{iqr'}}{2i} - \frac{e^{-r'/a} e^{-iqr'}}{2i} \right]$$

$$= \frac{2mZe^2}{\hbar^2 q} \left[\frac{1}{2i(-iq + 1/a)} - \frac{1}{2i(iq + 1/a)} \right]$$

$$= \frac{2mZe^2}{\hbar^2 q} \frac{1}{q^2 + (1/a)^2}$$

$$f_n^{(1)}(\vartheta) = \frac{2mZe^2}{\hbar^2} \frac{1}{(2k \sin \frac{\vartheta}{2})^2 + \left(\frac{1}{a}\right)^2}$$

$$\frac{d\sigma_n^{(1)}}{d\Omega} = \frac{(2mZe^2/\hbar^2)^2}{\left[(2k \sin \frac{\vartheta}{2})^2 + \left(\frac{1}{a}\right)^2\right]^2}$$

↓ $a \rightarrow \infty$

$$\frac{d\sigma_n^{(1)}}{d\Omega} = \left(\frac{Ze^2}{4E \sin^2 \frac{\vartheta}{2}} \right)^2$$

Rutherford
Streuquerschnitt
 $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$

III.7. freie und volle Propagatoren, Matrix-Propagator Feynman Graphen

$\hat{G}_0^{(\pm)}$ Greenscher Operator oder freier Propagator

$$\hat{G}_0^{(\pm)} = -(\hat{H}_0 - E \mp i\varepsilon)^{-1}$$

Def: voller Propagator

$$\hat{G}^{(\pm)} = -(\hat{H}_0 + \hat{V} - E \mp i\varepsilon)^{-1} = -(\hat{H} - E \mp i\varepsilon)^{-1}$$

$$\hat{G}^{(\pm)} - \hat{G}_0^{(\pm)} = \hat{G}^{(\pm)} \underbrace{\hat{G}_0^{(\pm)-1} \hat{G}_0^{(\pm)}}_{\mathbb{I}} - \underbrace{\hat{G}^{(\pm)} \hat{G}_0^{(\pm)-1}}_{\mathbb{I}} \hat{G}_0^{(\pm)}$$

$$= -\hat{G}^{(\pm)} (\hat{H}_0 - E \mp i\varepsilon) \hat{G}_0^{(\pm)}$$

$$+ \hat{G}^{(\pm)} (\hat{H} - E \mp i\varepsilon) \hat{G}_0^{(\pm)}$$

$$= + \hat{G}^{(\pm)} \hat{V} \hat{G}_0^{(\pm)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \hat{G}^{(\pm)} &= \hat{G}_0^{(\pm)} + \hat{G}^{(\pm)} \hat{V} \hat{G}_0^{(\pm)} \\ \text{analog} \quad \hat{G}^{(\pm)} &= \hat{G}_0^{(\pm)} + \hat{G}_0^{(\pm)} \hat{V} \hat{G}^{(\pm)} \end{aligned}}$$

durch Vergleich mit der Bornschen Reihe für die T-Matrix findet man

Relation zwischen
T-Matrix und vollen
Propagator

$$\boxed{\hat{T}(\pm) = \hat{V} + \hat{V} \hat{G}(\pm) \hat{V}}$$

$\Rightarrow$ T Matrix ist wohl hermitisch, denn

$$\hat{T}(\pm)^\dagger = \hat{V}^\dagger + \hat{V}^\dagger \left[\hat{V} \frac{1}{\hat{H} - E \pm i\epsilon} \hat{V} \right]^\dagger +$$

$$= \hat{V} - \hat{V} \frac{1}{\hat{H} - E \pm i\epsilon} \hat{V}$$

$$\hat{T}(\pm)^\dagger + = \hat{T}(\pm) \quad \hat{T}(\pm)^\dagger = \hat{T}(\pm)$$

Lösung des Streuproblems mit T-Matrix bzw. vollen
Propagator

$$|\psi_n^{(+)}\rangle = \left[1 + \hat{G}_0^{(+)} \hat{V} \right] |\phi_n^{(+)}\rangle$$

$$= \left[1 + \hat{G}_0^{(+)} \hat{V} + \hat{G}_0^{(+)} \hat{V} \hat{G}_0^{(+)} \hat{V} + \dots \right] |\phi_n^{(+)}\rangle$$

$$= \left[1 + \hat{G}^{(+)} \hat{V} \right] |\phi_n^{(+)}\rangle$$

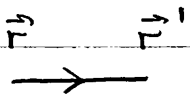
$\Rightarrow$ Zur (nichtstörungstheoretischen) Lösung des
Streuproblems benötigt man entweder $\hat{T}(\pm)$
oder $\hat{G}(\pm)$

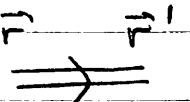
$$\hat{T}^{(+)} = \hat{V} + \hat{V} \hat{G}_0^{(+)} \hat{V} + \hat{V} \hat{G}_0^{(+)} \hat{V} \hat{G}_0^{(+)} \hat{V} + \dots$$

$$\hat{G}^{(+)} = \hat{G}_0^{(+)} + \hat{G}_0^{(+)} \hat{V} \hat{G}_0^{(+)} + \hat{G}_0^{(+)} \hat{V} \hat{G}_0^{(+)} \hat{V} \hat{G}_0^{(+)} + \dots$$

graphische Darstellung

Feynman Graphen

$$\hat{G}_0^{(+)} ; \text{Orbdarstellung } G_0^{(+)}(\vec{r}, \vec{r}')$$


$$\hat{G}^{(+)} ; \text{Orbdarstellung } G^{(+)}(\vec{r}, \vec{r}')$$


$$\hat{T}^{(+)} ; \text{Orbdarstellung } T^{(+)}(\vec{r}, \vec{r}')$$


$$\hat{V} ; \text{Orbdarstellung } V(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$


$$\square = \bullet + \bullet \rightarrow \bullet + \bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet + \dots$$

$$\begin{aligned} \bullet \xrightarrow{\vec{r}_1} \bullet \xrightarrow{\vec{r}_2} &\hat{=} \int d^3\vec{r} \int d^3\vec{r}' V(\vec{r}_1) \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}) G_0^{(+)}(\vec{r}, -\vec{r}') V(\vec{r}') \delta(\vec{r}' - \vec{r}_2) \\ &= V(\vec{r}_1) G_0^{(+)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) V(\vec{r}_2) \end{aligned}$$

$$\bullet \xrightarrow{\vec{r}_1} \bullet \xrightarrow{\vec{r}_2} = \bullet \rightarrow \bullet + \bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet + \bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet + \dots$$

$$\begin{aligned} \bullet \xrightarrow{\vec{r}_1} \bullet \xrightarrow{\vec{r}_2} &= \int d^3\vec{r} \int d^3\vec{r}' G_0^{(+)}(\vec{r}_1, \vec{r}) V(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}') G_0^{(+)}(\vec{r}', \vec{r}_2) \\ &= \int d^3\vec{r} G_0^{(+)}(\vec{r}_1, \vec{r}) V(\vec{r}) G_0^{(+)}(\vec{r}, \vec{r}_2) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{diagram}} = \bullet + \bullet \rightarrow \boxed{\text{diagram}}$$

$$\Rightarrow = \rightarrow + \rightarrow \bullet \rightarrow$$

bzw

$$\boxed{\text{diagram}} = \bullet + \bullet \rightarrow \bullet$$

$$\Rightarrow = \rightarrow + \rightarrow \boxed{\text{diagram}} \rightarrow$$

III. 8. Møller Operatoren und S-Matrix

Ein wichtiges Problem der Streutheorie ist die Bestimmung des Übergangsmatrixelements

$$t = -\infty : |\vec{b}\rangle \quad t = +\infty : |\vec{b}'\rangle$$

retardierte ("in") Lösung

$$E = \frac{\hbar |\vec{b}|^2}{2m} = \frac{\hbar |\vec{b}'|^2}{2m}$$

$$|\psi_{\vec{b}}^{(+)}(t \rightarrow -\infty)\rangle = |\phi^{(+)}\rangle$$

avancierte ("out") Lösung

$$|\psi_{\vec{b}}^{(-)}(t \rightarrow +\infty)\rangle = |\phi^{(-)}\rangle$$

gesucht

$$\langle \psi_{\vec{b}'}^{(-)}(t=0) | \psi_{\vec{b}}^{(+)}(t=0) \rangle = \langle \psi_{\vec{b}'}^{(-)} | \psi_{\vec{b}}^{(+)} \rangle$$

wobei

$$|\psi_{\vec{b}}^{(-)}(t \rightarrow +\infty)\rangle = |\vec{b}'\rangle$$

$$|\psi_{\vec{b}}^{(+)}(t \rightarrow -\infty)\rangle = |\vec{b}\rangle$$

mit

$$|\psi_{\vec{b}}^{(\pm)}\rangle = |\psi_{\vec{b}}^{(\pm)}(0)\rangle = e^{+i\hat{H}t/\hbar} e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar} |\psi_{\vec{b}}^{(\pm)}(t)\rangle$$

$$\Rightarrow |\psi_{\vec{b}}^{(\pm)}\rangle = \lim_{t \rightarrow \mp\infty} e^{i\hat{H}t/\hbar} e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar} |\vec{b}\rangle$$

Def: Møller Operatoren

$$\hat{\Omega}_{\pm} \equiv \lim_{t \rightarrow \mp\infty} e^{i\hat{H}t/\hbar} e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar}$$

$$|\psi_{\vec{b}}^{(\pm)}\rangle = \hat{\Omega}_{\pm} |\vec{b}\rangle$$

Mit Hilfe der Møller Operatoren ergibt sich die gesuchte Größe zu

$$\langle \psi_{\vec{b}'}^{(-)} | \psi_{\vec{b}}^{(+)} \rangle = \langle \vec{b}' | \hat{\Omega}_{-}^{\dagger} \hat{\Omega}_{+} | \vec{b} \rangle$$

d.h. als Matrixelement zwischen Eigenzuständen des freien Hamiltonoperators des Operators

$$\hat{S} \equiv \hat{\Omega}_{-}^{\dagger} \hat{\Omega}_{+}$$

$$\langle \psi_{\vec{b}'}^{(-)} | \psi_{\vec{b}}^{(+)} \rangle = \langle \vec{b}' | \hat{S} | \vec{b} \rangle$$

Def: $\hat{S}$ wird Streu matrix genannt (S-Matrix)

Eigenschaften der Møller Operatoren und der S-Matrix

(i) die Møller Operatoren sind isometrisch

$$\boxed{\hat{\Omega}_+^\dagger \hat{\Omega}_+ = \hat{\Omega}_-^\dagger \hat{\Omega}_- = \mathbb{1}}$$

aber nicht unitär

$$\boxed{\hat{\Omega}_+ \hat{\Omega}_+^\dagger \neq \mathbb{1}}$$

Bew: sei $|\psi_E\rangle$ gebundener Zustand von $\hat{H}$ mit $E < 0$

$$e^{i\hat{H}_0 t/\hbar} e^{-i\hat{H} t/\hbar} |\psi_E\rangle = e^{i\hat{H}_0 t/\hbar} e^{-\frac{i}{\hbar} E t} |\psi_E\rangle$$

keine Konvergenz im Limit $t \rightarrow -\infty$

da das Spektrum von $\hat{H}_0$ nicht negativ ist

(ii) die Operatoren $\hat{P}_\pm = \hat{\Omega}_\pm \hat{\Omega}_\pm^\dagger$
sind Projektoren

$$\begin{aligned} \hat{P}_\pm^\dagger &= \hat{P}_\pm & \hat{P}_\pm \hat{P}_\pm &= \hat{\Omega}_\pm \underbrace{\hat{\Omega}_\pm^\dagger \hat{\Omega}_\pm}_{\mathbb{1}} \hat{\Omega}_\pm^\dagger \\ & & &= \hat{\Omega}_\pm \hat{\Omega}_\pm^\dagger = \hat{P}_\pm \end{aligned}$$

$$\boxed{\hat{\Omega}_\pm \hat{\Omega}_\pm^\dagger = 1 - \hat{P}_{\text{geb. Zust.}}}$$

$$\boxed{\hat{\Omega}_\pm \mathcal{H} = \mathcal{H}^\perp_{\text{geb. Zust.}}}$$

$$H_0 \tilde{R}_+ \tilde{R}_+ = H_0 \tilde{S} \quad \square$$

$$\tilde{S} H_0 = \tilde{R}_+ \tilde{R}_+ H_0 = \tilde{R}_+ H \tilde{R}_+$$

Bew:

$$\boxed{[\tilde{S}, H_0] = 0}$$

(v) es gilt

$\tilde{S} \tilde{R}_+$ analog

$$= \underbrace{\tilde{R}_+ \tilde{R}_+ - \tilde{R}_+ \tilde{P}_{\text{gebzt}} \tilde{R}_+}_{=0} = \Pi \quad \square$$

$$\tilde{S}^+ \tilde{S} = \tilde{R}_+ \tilde{R}_- \tilde{R}_+ \tilde{R}_+ = \tilde{R}_+ (1 - \tilde{P}_{\text{gebzt}}) \tilde{R}_+ \quad \square$$

$$\boxed{\tilde{S} \tilde{S}^+ = \tilde{S}^+ \tilde{S} = 1}$$

(iv) da $\tilde{S}$ -Matrix ist unitär

$$= \tilde{R}_\mp e^{i H_0 \tau / \hbar} \quad \square$$

$$= \lim_{\tau \rightarrow \pm \infty} e^{i H \frac{\tau}{2}} e^{-i H_0 \frac{\tau}{2}} e^{i H_0 \frac{\tau}{2}}$$

$$e^{-i H_0 \frac{\tau}{2}} e^{i H_0 \frac{\tau}{2}}$$

$$\lim_{\tau \rightarrow \pm \infty} e^{i H \frac{\tau}{2}} e^{-i H_0 \frac{\tau}{2}} e^{i H_0 \frac{\tau}{2}} = \tilde{R}_\mp \quad \square$$

Bew:

$$\boxed{H \tilde{R}_\mp = \tilde{R}_\mp H_0}$$

(!!!) es gilt

Zshg. S-Matrix und zeitabhängige Störungstheorie

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V} e^{-\varepsilon|t|/\hbar}$$

Beh.:

$$S = T \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \hat{V}_{\pm}(z) \right\}$$

Dyson'sche
Gleichung

wobei T der Dyson'sche Zeitordnungsoperator
und $\hat{V}_{\pm}(z)$ der Wechselwirkungshamiltonian
im Wechselwirkungsbild ist

$$T \left[A_{\pm}(t_1) B_{\pm}(t_2) \right] = \begin{cases} A_{\pm}(t_1) B_{\pm}(t_2) & t_1 > t_2 \\ B_{\pm}(t_2) A_{\pm}(t_1) & t_1 < t_2 \end{cases}$$

der Fall $t_1 = t_2$ ist unbestimmt aber nicht
von Interesse da der Beitrag vom Maß Null ist
falls $[A_{\pm}(t_1), B_{\pm}(t_1)]$ beschränkt

Bew.:

$$S = \lim_{\substack{t_1 \rightarrow -\infty \\ t_2 \rightarrow +\infty}} e^{i \frac{\hat{H}_0 t_2}{\hbar}} e^{-i \frac{\hat{H} t_2}{\hbar}} e^{\frac{i \hat{H} t_1}{\hbar}} e^{-\frac{i \hat{H}_0 t_1}{\hbar}}$$

$$\text{Def: } S(t, t') \equiv e^{i \frac{\hat{H}_0 t}{\hbar}} e^{-i \frac{\hat{H} t}{\hbar}} e^{\frac{i \hat{H} t'}{\hbar}} e^{-\frac{i \hat{H}_0 t'}{\hbar}}$$

$$\begin{aligned} i \hbar \frac{\partial}{\partial t} S(t, t') &= e^{i \frac{\hat{H}_0 t}{\hbar}} (-\hat{H}_0) e^{-i \frac{\hat{H} t}{\hbar}} e^{\frac{i \hat{H} t'}{\hbar}} e^{-\frac{i \hat{H}_0 t'}{\hbar}} \\ &\quad + e^{i \frac{\hat{H}_0 t}{\hbar}} \hat{H} e^{-i \frac{\hat{H} t}{\hbar}} e^{\frac{i \hat{H} t'}{\hbar}} e^{-\frac{i \hat{H}_0 t'}{\hbar}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{mit } & e^{i\hat{H}_0 t/\hbar} (\hat{H} - \hat{H}_0) e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar} \\
 &= e^{i\hat{H}_0 t/\hbar} \hat{V} e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar} \\
 &\equiv \hat{V}_I(t)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} S(t, t') &= e^{i\hat{H}_0 t/\hbar} (\hat{H} - \hat{H}_0) \underbrace{e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar} e^{i\hat{H}_0 t'/\hbar}}_{\mathbb{I}} \\
 &\quad \cdot e^{i\hat{H} t'/\hbar} e^{-i\hat{H}_0 t'/\hbar} \\
 &= \hat{V}_I(t) S(t, t')
 \end{aligned}$$

mit A.B., $S(t', t') = \mathbb{I}$

$$S(t, t') = T \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_{t'}^t dz \hat{V}_I(z) \right\}$$

es gilt

$$S(t_1, t_2) = S(t_1, t) S(t, t_2)$$

und

$$S(\infty, -\infty) = S = T \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dz \hat{V}_I(z) \right\}$$

Die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion, d.h.

die zeitabhängige Störungstheorie entspricht der Bornschen Reihe

$$S \approx \mathbb{I} - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dz \hat{V}_I(z) + \frac{1}{2!} \left(\frac{-i}{\hbar} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} dz' T \hat{V}_I(z) \hat{V}_I(z') + \dots$$

III.9. Zweiteilchenstreuung

(A) betrachten zunächst unterscheidbare Teilchen

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$$

• "in" & "out" Zustände $|\phi_E^{(\pm)}\rangle$ $E = E_1 + E_2$

$$\phi_E^{(\pm)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \langle \vec{r}_1 | \langle \vec{r}_2 | \phi_E^{(\pm)} \rangle$$

typischerweise Produktzustände aus ebenen Wellen

$$\phi_E^{(\pm)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1} e^{i\vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2}$$

• Streuzustände $|\psi_E^{(\pm)}\rangle$

$$\psi_E^{(\pm)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \langle \vec{r}_1 | \langle \vec{r}_2 | \psi_E^{(\pm)} \rangle$$

• Hamiltonian

$$\hat{H} = \hat{H}_{01} + \hat{H}_{02} + \hat{V}$$

$$\langle \vec{r}_1 | \langle \vec{r}_2 | \hat{H} | \vec{r}_1' \rangle | \vec{r}_2' \rangle,$$

$$= \left[-\frac{\hbar^2}{2m_1} \Delta_1 - \frac{\hbar^2}{2m_2} \Delta_2 + V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \right] \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_1') \delta(\vec{r}_2 - \vec{r}_2')$$

typischerweise

$$V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = V(\vec{r})$$

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad \text{Relativkoordinate}$$

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad \text{Schwerpunktschwerd.,}$$

• Lippmann - Schwinger Gleichung

$$|\psi_E^{(\pm)}\rangle = |\phi_E^{(\pm)}\rangle - \frac{1}{\hat{H}_{01} + \hat{H}_{02} - E \mp i\varepsilon} \hat{V} |\phi_E^{(\pm)}\rangle$$

Transformation ins Schwerpunktsystem

$\hat{H}_{01} + \hat{H}_{02}$ nur noch von $\vec{r}$ abhängig

$$= \langle \vec{r}_1, \vec{r}_2 | \frac{1}{\hat{H}_{01} + \hat{H}_{02} - E \mp i\varepsilon} | \vec{r}_1', \vec{r}_2' \rangle$$

$$= -\frac{2\mu}{\hbar^2} \frac{e^{\pm ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} \delta(\vec{R}-\vec{R}')$$

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu}$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

mit $\phi_E^{(\pm)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = e^{i\vec{b} \cdot \vec{r}} \quad \vec{b} = \frac{m_2 \vec{b}_1}{m_1 + m_2} - \frac{m_1 \vec{b}_2}{m_1 + m_2} = \mu (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) / \hbar$

$\Rightarrow \psi_E^{(\pm)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \psi_E^{(\pm)}(\vec{r})$

$\Rightarrow$ Lippmann-Schwinger-Gleichung in Ortsdarstellung (im Schwerpunktsystem)

$$\psi_E^{(\pm)}(\vec{r}) = e^{i\vec{b} \cdot \vec{r}} - \frac{2\mu}{\hbar^2} \int d^3\vec{r}' \frac{e^{\pm i k |\vec{r} - \vec{r}'|}}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} V(\vec{r}') \psi_E^{(\pm)}(\vec{r}')$$

$\cong$ Einteilchenproblem mit reduzierter Masse und Relativimpuls

(B) identische Teilchen

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \overset{A, S, S}{\otimes} \mathcal{H}_2$$

Bosonen: $\phi_E^{(\pm)} \rightarrow e^{i\vec{b} \cdot \vec{r}} + e^{-i\vec{b} \cdot \vec{r}} \quad \text{Symmetrie}$

Partialwellenzerlegung

$$C_e \equiv 0 \quad \ell = 1, 3, 5, \dots$$

$$\psi_E(r, \vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} \frac{\sin(kr - n\pi + \delta_{2n})}{kr} P_{2n}(\cos\vartheta)$$

Formionen: $\phi_E^{(\pm)} \rightarrow e^{i\vec{b} \cdot \vec{r}} - e^{-i\vec{b} \cdot \vec{r}}$ Antisymmetrie

Partialwellenzersetzung $C_0 \equiv 0$ $\ell = 0, 2, 4, 6 \dots$

$$\psi_E(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n+1} \frac{\sin(kr - \frac{2n+1}{2}\pi + \delta_{2n+1})}{kr} P_{2n+1}(\cos\theta)$$

(keine s-Wellenstreuung!) $\rightarrow$ ~~0~~