

II. Photonen

bisher: elm. Felder als "äußere vorgegebene Felder"

Problem: z.B. Lorentzkraft auf ein geladenes ruhendes Testteilchen definiert elektrisches Feld

klass. $\vec{E} = - \frac{\vec{F}}{q}$

Q.M. $? = - \frac{\vec{F}}{q}$

$\Rightarrow$ Es macht Sinn das Strahlungsfeld zu quantisieren,

volle Theorie: Quantenfeldtheorie $\rightarrow$ spätere Vorlesung
hier: vereinfachte Betrachtung für das Strahlungsfeld

II.1 Quantisierung des Strahlungsfeldes

Ausgangspunkt: klass. Maxwellgleichungen (SI)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j}$$

} homogene Gleichungen

} inhomogene Gleichungen

nur konsistent falls auch Kontinuitätsgleichung gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial}{\partial t} \rho / \epsilon_0 \quad \text{in letzte Maxwell}$$

$$\underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})}_{=0} = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{1}{c^2} \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$= \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

allgemeine Lösung der homogenen Gleichungen
durch Einführung von Potentialen

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Damit sind homogene Gleichungen automatisch erfüllt

• Ladungs- und stromfreier Raum $\vec{j} = 0$, $\rho = 0$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$$

Einsetzen der Ausdrücke mittels Vektorpotential $\vec{A}$ und
skalarem Potential ϕ führt zu gekoppelter DGL.

• Eichfreiheit

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \Lambda$$

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi + \frac{\partial \Lambda}{\partial t}$$

löst physikalischen Größen $\vec{B}$ und $\vec{E}$ gleich.

Wählen Strahlungsgleichung

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad \phi = 0}$$

(Coulomb - Eichy)

dann ergibt sich Wellengleichung für $\vec{A}$

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \vec{A}(\vec{r}, t) = 0 \quad (\text{mit } \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0!)$$

Lösung sind ebene Wellen (später Realteil!)

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}, t) \sim \vec{\varepsilon}(\vec{b}) e^{i(\vec{b} \cdot \vec{r} - \omega t)}} \quad \omega = |\vec{b}|c$$

aus $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ folgt fema

$$\boxed{\vec{\varepsilon}(\vec{b}) \cdot \vec{b} = 0}$$

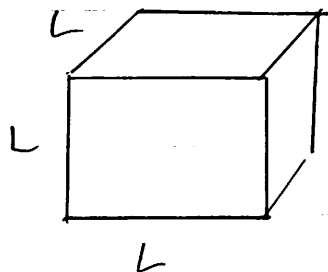
transversale Wellen

$\Rightarrow$ nur zwei linear unabhängige Polarisationen

$$\vec{\varepsilon}_1(\vec{b}) \cdot \vec{\varepsilon}_2(\vec{b}) = 0$$

$$\vec{\varepsilon}_i(\vec{b}) \cdot \vec{b} = 0$$

unendlich ausgedehnter Raum ist mathematisch etwas schwierig, daher betrachten wir zunächst ein endliches Volumen L^3 mit periodischen Randbedingungen und führen dann den Grenzwert $L \rightarrow \infty$ aus (oder auch nicht).



$$\vec{k}_n = \frac{2\pi}{L} (n_x, n_y, n_z) \quad n_i \in \mathbb{Z}$$

mit Ausnahme von $n_x = n_y = n_z = 0$

Fourierzerlegung von $\vec{A}(\vec{r}, t)$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\epsilon_0 L^3}} \sum_{\vec{k}_n} \sum_{\lambda=1}^2 \vec{\epsilon}_\lambda(\vec{k}) q_\lambda(\vec{k}, t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

Da $\vec{A}$ reell ist folgt

$$q_\lambda(-\vec{k}, t) \stackrel{!}{=} q_\lambda(\vec{k}, t)^* \quad \vec{\epsilon}_\lambda(-\vec{k}) \stackrel{!}{=} \vec{\epsilon}_\lambda^*(\vec{k})$$

Damit $n_x = n_y = n_z = 0$ ausgenommen bleibt, wählen wir $q_\lambda(\vec{0}, t) \equiv 0$. Damit $\vec{A}$ die Wellengleichung erfüllt heißt

$$\ddot{q}_\lambda(\vec{k}, t) + \omega_{\vec{k}}^2 q_\lambda(\vec{k}, t) = 0$$

Energie und Hamiltonfunktion

$$E = \int d^3r \left(\frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}|^2 + \frac{1}{2\mu_0} |\vec{B}|^2 \right) \quad c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r \left(\dot{\vec{A}}^2 + c^2 (\vec{\nabla} \times \vec{A})^2 \right)$$

um können wir verwenden

$$(\vec{\nabla} \times \vec{A})^2 = \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})) + \underbrace{\vec{A} \cdot \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})}_{=0} - \vec{A} \Delta \vec{A}$$

mit $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ folgt

$$\int d^3r (\vec{\nabla} \times \vec{A})^2 = -\int d^3r \vec{A} \Delta \vec{A} + \underbrace{\int d^3r \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}))}_{\text{mit Gauß} = 0}$$

$\Rightarrow$

$$E = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r \left(\dot{\vec{A}}^2 - c^2 \vec{A} \Delta \vec{A} \right)$$

Nun setzen wir hier die Fourierzerlegung ein

$$\frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r \dot{\vec{A}}^2 = \frac{1}{4V} \int d^3r \sum_{\vec{k}, \lambda} \sum_{\vec{k}', \lambda'} \underbrace{\vec{E}_\lambda(\vec{k}) \cdot \vec{E}_{\lambda'}(\vec{k}')}_{e^{i(\vec{k} + \vec{k}') \cdot \vec{r}}} \dot{q}_\lambda(\vec{k}, t) \dot{q}_{\lambda'}(\vec{k}', t)$$

$= \delta_{\vec{k}, -\vec{k}'}$

$$= \frac{1}{4} \sum_{\vec{k}} \sum_{\lambda, \lambda'} \underbrace{\vec{E}_\lambda(\vec{k}) \cdot \vec{E}_{\lambda'}(-\vec{k})}_{= \vec{E}_{\lambda'}(\vec{k})} \dot{q}_\lambda(\vec{k}, t) \underbrace{\dot{q}_{\lambda'}(-\vec{k}, t)}_{= \dot{q}_{\lambda'}^*(\vec{k}, t)}$$

$\delta_{\lambda, \lambda'}$

$$= \frac{1}{4} \sum_{\vec{k}, \lambda} \dot{q}_\lambda^*(\vec{k}, t) \dot{q}_\lambda(\vec{k}, t)$$

analog $\vec{A} \Delta \vec{A}$ Term. Dies liefert schließlich

$$E = \frac{1}{4} \sum_{\vec{k}, \lambda} \dot{q}_\lambda^*(\vec{k}, t) \dot{q}_\lambda(\vec{k}, t) + \omega_k^2 q_\lambda^*(\vec{k}, t) q_\lambda(\vec{k}, t)$$

Zerlegen in Real- und Imaginärteile

$$q_\lambda = q_{1\lambda} + i q_{2\lambda} \quad q_{i\lambda} \in \mathbb{R}$$

$$q_{1\lambda}(-\vec{k}, t) = q_{1\lambda}(\vec{k}, t) \quad q_{2\lambda}(-\vec{k}, t) = -q_{2\lambda}(\vec{k}, t)$$

$\Rightarrow$ Summation nur über Halbraum des $\vec{k}$ und Faktor "2" $\Rightarrow$ Hamiltonfunktion $H = E$

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}, \lambda} \left[\dot{q}_{1\lambda}^2 + \omega_k^2 q_{1\lambda}^2 + \dot{q}_{2\lambda}^2 + \omega_k^2 q_{2\lambda}^2 \right]$$

elm. Feld ist eine Summe harmonischer Oszillatoren

Quantisierung des Feldes $\hat{=}$ klass. harmonischer Oszillatoren



q.m. harmonischer Oszillatoren

$$p_{1\lambda}(\vec{k}) = \dot{q}_{1\lambda}(\vec{k})$$

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}, \lambda} \left[\hat{p}_{1\lambda}^2 + \omega_k^2 \hat{q}_{1\lambda}^2 + \hat{p}_{2\lambda}^2 + \omega_k^2 \hat{q}_{2\lambda}^2 \right]$$

postulieren!

$$[\hat{q}_{1\lambda}, \hat{p}_{j\lambda'}] = i\hbar \delta_{ij} \delta_{\lambda\lambda'}$$

Leitervolatoren

$$\hat{a}_{12}(\vec{b}) = \sqrt{\frac{\omega_k}{2\hbar}} \left(\hat{q}_{12}(\vec{b}) + \frac{i}{\omega_k} \hat{p}_{12}(\vec{b}) \right)$$

$$\hat{a}_{12}^+(\vec{b}) = \sqrt{\frac{\omega_k}{2\hbar}} \left(\hat{q}_{12}(\vec{b}) - \frac{i}{\omega_k} \hat{p}_{12}(\vec{b}) \right)$$

mit

$$[\hat{a}_{12}(\vec{b}), \hat{a}_{j2'}^+(\vec{b}')] = \delta_{ij} \delta_{22'} \delta_{\vec{b}\vec{b}'}$$

bis jetzt $\vec{b}, \vec{b}'$ im Halbraum $\Rightarrow$ Vereinfachung

$$\hat{a}_2(\vec{b}) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{a}_{12}(\vec{b}) + i \hat{a}_{22}(\vec{b}) \right)$$

$$\hat{a}_2(-\vec{b}) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{a}_{12}(\vec{b}) - i \hat{a}_{22}(\vec{b}) \right)$$

mit

$$[\hat{a}_2(\vec{b}), \hat{a}_{2'}^+(\vec{b}')] = \delta_{22'} \delta_{\vec{b}\vec{b}'}$$

Damit

(ohne Stich !)

$$\hat{\vec{A}}(\vec{r}, t) = \sqrt{\frac{\hbar}{4\pi\epsilon_0 L^3}} \sum_{\vec{b}, 2} \frac{1}{\sqrt{\omega_k}} \vec{\epsilon}_{\vec{b}} \left[\hat{a}_2(\vec{b}) e^{i\vec{b}\cdot\vec{r}} + \hat{a}_2^+(\vec{b}) e^{-i\vec{b}\cdot\vec{r}} \right]$$

Hamiltonoperator

$$H = \sum_{\vec{k}, \lambda} \hbar \omega_{\vec{k}} \left(\hat{a}_{\vec{k}, \lambda}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{k}, \lambda} + \frac{1}{2} \right)$$

divergierende Nullpunktenergie!

Wir ignorieren hier das Problem der Nullpunktenergie und verweisen auf die Quantenfeldtheorie

Interpretation

$$\hat{n}_{\vec{k}, \lambda} = \hat{a}_{\vec{k}, \lambda}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{k}, \lambda}$$

Teilchenzahloperator in Mode $(\vec{k}, \lambda)$

Photonen

$\hat{a}_{\vec{k}, \lambda}^{\dagger}$ erzeugt Photonen in $(\vec{k}, \lambda)$

$\hat{a}_{\vec{k}, \lambda}$ vernichtet — " —

Impuls des elm. Feldes

aus klass. Elektrodynamik

$$\vec{P} = \epsilon_0 \int d^3r \vec{E} \times \vec{B}$$

mit analoger Prozedur wie oben findet man

$$\hat{\vec{p}} = \sum_{\vec{k}, \lambda} \hbar \vec{k} \hat{a}_\lambda^\dagger(\vec{k}) \hat{a}_\lambda(\vec{k})$$

Interpretation: Impuls eines Photons in $(\vec{k}, \lambda)$: $\hbar \vec{k}$

Bem: Man kann auch den Drehimpuls des elektromagnetischen Feldes einführen (bezgl. $\vec{r}_0$)

$$\vec{L}_G = \epsilon_0 \int d^3\vec{r} (\vec{r} - \vec{r}_0) \times (\vec{E} \times \vec{B})$$

und findet zwei Beiträge

$$\vec{L}_G = \vec{L} + \vec{S}$$

Orbitaler Drehimpuls
hängt von $\vec{r}_0$ ab

innerer Drehimpuls
hängt nicht von $\vec{r}_0$ ab
Spin $S=1$

dazu mehr in QFT_{II}

II.2 Spontane Emission

Mit Hilfe des quantisierten Strahlungsfeldes können wir die spontane Emission erklären

Hamiltonoperator eines Elektrons im quantisierten Feld:

$$H_e = \frac{1}{2m} (\vec{p} - e\vec{A})^2 = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{e}{m} \vec{A} \cdot \vec{p} + \frac{e^2}{2m} \vec{A}^2$$

wie in I

$$H_e = H_0 + H_1 \quad H_0 = \frac{\vec{p}^2}{2m} \quad H_1 = -\frac{e}{m} \vec{A} \cdot \vec{p}$$

ergänzen durch Hamiltonian des Strahlungsfeldes

$$H = H_e + H_g \quad H_g = \sum_{\vec{k}, \lambda} \hbar \omega_k \hat{a}_\lambda^\dagger(\vec{k}) \hat{a}_\lambda(\vec{k})$$

zeitabhängige Störungstheorie

Anfangszustand $|i\rangle = |n; 0\rangle$

Endzustand $|f\rangle = |m; 1_{\vec{k}, \lambda}\rangle$ ausschließend
Summation über
($\vec{k}, \lambda$)

Energiedifferenz $\Delta E = E_f - E_i = E_m - E_n + \hbar \omega_k$

Nach Fermis goldener Regel (einfacher für $L \rightarrow \infty$)

$$W_{n \rightarrow m} = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda} \frac{2\pi}{\hbar} \delta(E_m - E_n + \hbar \omega_k) |\langle f | H_1 | i \rangle|^2$$

Matrixelement

$$\langle f | H_1 | i \rangle = -\frac{e}{m} \langle m | \langle 1_{\vec{k}, \lambda} | \vec{A}(\vec{r}) | 0 \rangle \cdot \vec{p} | n \rangle$$

jetzt

$$|1_{\vec{b}2}\rangle = \hat{a}_2^+(\vec{b})|0\rangle$$

$$\langle 1_{\vec{b}2} | \vec{A}(\vec{r}) | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{a}_2(\vec{b}) \vec{A}(\vec{r}) | 0 \rangle$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{4\pi\epsilon_0}} \int \frac{d^3\vec{b}'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{\omega_{\vec{b}'}}} \sum_{\lambda'} \vec{E}_{\lambda'}(\vec{b}') e^{-i\vec{b}'\vec{r}}$$

$$\cdot \langle 0 | \hat{a}_2(\vec{b}) \hat{a}_2^+(\vec{b}') | 0 \rangle$$

$$= \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{\vec{b}\vec{b}'} (2\pi)^3 \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{wegen } L \rightarrow \infty \\ \text{Limes} \end{array}$$

Beitrag selbst

im Vakuum, d.h. ohne klassisches elum Feld!

Alle weiteren Schritte wie bei stimulierter Emission

$$W_{n \rightarrow m} = \frac{4}{3} \frac{\omega^3}{\hbar c^3 (4\pi\epsilon_0)} |\langle m | \vec{d} | n \rangle|^2$$

$\Rightarrow$ Einstein A-Koeffizient der spontanen Emission