

Quantenmechanik II SS 2017

M. Fleischhauer

I. Zeitabhängige Störungstheorie Emission und Absorption elm. Strahlung

I.1 Zeitabhängige Störungstheorie

Was ist die Zeitevolution eines Quantensystems nach Einschalten einer (kleinen) ggf. explizit zeitabhängigen Störung?

$$\hat{H} = \hat{H}_0$$

↓

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \lambda \hat{H}_1(t)$$

λ formaler Parameter den wir später 1 setzen können

Das Spektrum und EZ von $\hat{H}_0$ seien bekannt

$$\hat{H}_0 |n\rangle = E_n |n\rangle \quad \{|n\rangle\} \text{ VONB}$$

Annahme: $|\psi(t=0)\rangle = |m\rangle$ / $|\psi(t)\rangle = ?$

Wechselwirkungsbild

$$H = H_0 + H_1$$

$$|\varphi_I(t)\rangle = U_I(t, t_0) |\varphi(t_0)\rangle$$

wobei $U_I(t, t_0) \equiv U_0^{-1}(t, t_0) U(t, t_0)$

$$U_0(t, t_0) = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} H_0 (t - t_0)\right\}$$

Zeitentwicklungsoperator
bzgl. des ungestörten
Systems

$$U(t, t_0) = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} H (t - t_0)\right\}$$

Zeitentwicklungsoperator
bzgl. des vollen
Hamiltonians

- Bewegungsgleichung im WW-Bild

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |\varphi_I(t)\rangle &= \left[\frac{d}{dt} U_I(t, t_0) \right] |\varphi(t_0)\rangle \\ &= \underbrace{\left(\frac{d}{dt} U_I(t, t_0) \right) U_I^{-1}(t, t_0)}_{=?} |\varphi_I(t)\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dU_I}{dt} &= \frac{d}{dt} \left[e^{\frac{i}{\hbar} H_0 (t - t_0)} e^{-\frac{i}{\hbar} H (t - t_0)} \right] = \frac{i}{\hbar} H_0 U_I - \frac{i}{\hbar} U_I H \\ &= \frac{i}{\hbar} (H_0 - U_I H U_I^{-1}) U_I \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_I H U_I^{-1} &= e^{\frac{i}{\hbar} H_0 (t-t_0)} \underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar} H (t-t_0)} H e^{\frac{i}{\hbar} H (t-t_0)}}_{= H = H_0 + H_1} e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 (t-t_0)} \\
&= e^{\frac{i}{\hbar} H_0 (t-t_0)} (H_0 + H_1) \underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 (t-t_0)}}_{= U_0} \\
&= H_0 + U_0^{-1} H_1 U_0 = H_0 + H_{1I}(t)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow H_0 - U_I H U_I^{-1} = -U_0^{-1} H_1 U_0 = -H_{1I}(t)$$

$H_{1I}(t)$ ist der WW-Hamiltonian im Wechselwirkungsbild

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt} U_I = -\frac{i}{\hbar} H_{1I}(t) U_I} \quad (*)$$

Man beachte, daß $H_{1I}(t)$ sich explizit zeitabhängig ist selbst wenn H_1 selber nicht explizit zeitabhängig ist.

Wäre (*) eine klassische Gleichung, dann wäre

$$U_I(t, t_0) = \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t d\tau H_{1I}(\tau) \right\}$$

eine Lösung. Dies ist aber nicht der Fall, da im Allgemeinen

$$[H_{1I}(t), H_{1I}(t')] \neq 0$$

Die Lösung von (*) erfordert daher eine gewisse Sorgfalt. Für kleine Zeitinkremente gilt:

$$U_I(t+\delta t, t) = 1 - \frac{i}{\hbar} H_{1I}(t) \delta t$$

Iteration und Ausnutzen der Gruppeneigenschaft $U(t_1, t_3) = U(t_1, t_2) U(t_2, t_3)$ führt auf

$$U_I(t+2\delta t, t) = U_I(t+2\delta t, t+\delta t) U_I(t+\delta t, t)$$

$$= \left(1 - \frac{i}{\hbar} H_{1I}(t+\delta t) \delta t \right) \left(1 - \frac{i}{\hbar} H_{1I}(t) \delta t \right)$$

$$= 1 - \frac{i}{\hbar} \left(H_{1I}(t+\delta t) + H_{1I}(t) \right) \delta t$$

$$+ \underbrace{\left(-\frac{i}{\hbar} \right)^2 H_{1I}(t+\delta t) H_{1I}(t) \delta t^2}$$

man beachte die zeitliche Reihenfolge!

Schließlich ergibt sich für N infinitesimale Zeitschritte

$$U_I(t+N\delta t, t) = 1 - \frac{i}{\hbar} \sum_{j=0}^{N-1} H_{1I}(t+j\delta t) \delta t$$

$$+ \left(-\frac{i}{\hbar} \right)^2 \sum_{j_1=1}^{N-1} \sum_{j_2=0}^{j_1} H_{1I}(t+j_1\delta t) H_{1I}(t+j_2\delta t) \delta t^2$$

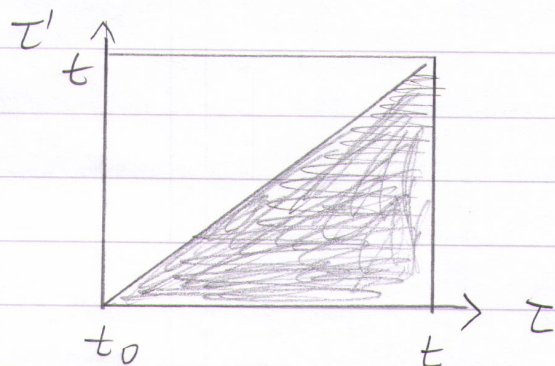
+ ...

Im Grenzwert $N \rightarrow \infty$, $\delta t \rightarrow 0$ mit $N\delta t = T = \text{konst}$ findet man die sogenannte

Dyson'sche Reihe

$$\begin{aligned}
 U_I(t, t_0) = & 1 + \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \int_{t_0}^t d\tau H_{1I}(\tau) \\
 & + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^t d\tau \int_{t_0}^{\tau} d\tau' H_{1I}(\tau) H_{1I}(\tau') \\
 & + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^3 \int_{t_0}^t d\tau \int_{t_0}^{\tau} d\tau' \int_{t_0}^{\tau'} d\tau'' H_{1I}(\tau) H_{1I}(\tau') H_{1I}(\tau'') \\
 & + \dots
 \end{aligned}$$

Man beachte die Obergrenzen der Integrale, die reflektieren, daß die Operatorprodukte stets eine durch die Zeitargumente definierte Reihenfolge haben sowie das Fehlen von Faktoren $\frac{1}{2!}$; $\frac{1}{3!}$ etc.



Das 2. Integral erstreckt sich nun über den schraffierten Parameterbereich

Würde gelten $[H_{1I}(\tau), H_{1I}(\tau')] = 0$ so könnte man schreiben

$$\int_{t_0}^t d\tau \int_{t_0}^{\tau} d\tau' H_{1I}(\tau) H_{1I}(\tau') = \frac{1}{2!} \int_{t_0}^t d\tau \int_{t_0}^t d\tau' H_{1I}(\tau) H_{1I}(\tau')$$

und die Dyson'sche Reihe könnte in einer Exponentialfunktion zusammengefaßt werden.

Mit Hilfe eines formalen Tricks ist dies aber auch für nicht kommutierende Größen möglich

Def: Dyson'scher Zeitordnungsoperator T

$$T \hat{A}(t_1) \hat{B}(t_2) = \begin{cases} \hat{A}(t_1) \hat{B}(t_2) & t_1 > t_2 \\ \hat{B}(t_2) \hat{A}(t_1) & t_1 < t_2 \end{cases}$$

$$T^{-1} \hat{A}(t_1) \hat{B}(t_2) = \begin{cases} \hat{B}(t_2) \hat{A}(t_1) & t_1 > t_2 \\ \hat{A}(t_1) \hat{B}(t_2) & t_1 < t_2 \end{cases}$$

Damit

$$\begin{aligned} U_I(t, t_0) &= T \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t d\tau H_{1I}(\tau) \right\} \\ U_I^{-1}(t, t_0) &= T^{-1} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t d\tau H_{1I}(\tau) \right\} \end{aligned}$$

Zeitentwicklung des Zustandes in Störungstheorie

Nach diesem Exkurs in das HW-Bild wollen wir zurück zur zeitabhängigen Störungstheorie kommen.

Es gilt

$$-i\hbar \frac{d}{dt} |\psi_I(t)\rangle = \lambda H_{1I}(t) |\psi_I(t)\rangle$$

Anfangsbedingung
(OBdA)

$$|\psi_I(t=t_0)\rangle = |n\rangle$$

Lösen durch Entwicklung von $|\varphi_I(t)\rangle$ in VONB $\{|k\rangle\}$:

$$|\varphi_I(t)\rangle = \sum_k C_k(t) |k\rangle \quad C_k(t) = \langle k | \varphi_I(t) \rangle$$

$$\Rightarrow i\hbar \frac{d}{dt} C_k(t) = i\hbar \frac{d}{dt} \langle k | \varphi_I(t) \rangle = \lambda \sum_n C_n(t) \langle k | \hat{H}_{1I}(t) | n \rangle$$

DGL-System für Koeffizienten $C_k(t)$; benötigen noch

$$\langle k | \hat{H}_{1I}(t) | n \rangle$$

$$\hat{H}_{1I}(t) = e^{\frac{i}{\hbar} H_0(t-t_0)} \hat{H}_1(t) e^{-\frac{i}{\hbar} H_0(t-t_0)}$$

$$\begin{aligned} \langle k | \hat{H}_{1I}(t) | n \rangle &= e^{\frac{i}{\hbar} E_k(t-t_0)} \langle k | \hat{H}_1(t) | n \rangle e^{-\frac{i}{\hbar} E_n(t-t_0)} \\ &= e^{\frac{i}{\hbar} (E_k - E_n)(t-t_0)} \underbrace{\langle k | \hat{H}_1(t) | n \rangle}_{\text{Matrixelement im Schrödingerbild}} \end{aligned}$$

Matrixelement im Schrödingerbild $\equiv H_{1kn}(t)$

Übergangsfrequenzen $\omega_{kn} = -\omega_{nk} \equiv \frac{E_k - E_n}{\hbar}$

Damit schreibt sich die DGL für die Koeffizienten von $|\varphi_I(t)\rangle$:

$$i\hbar \dot{C}_k(t) = \lambda \sum_n H_{1kn}(t) e^{i\omega_{kn}(t-t_0)} C_n(t)$$

Das ist eine Matrix-DGL mit der Matrixdimension
= Dimension des Hilbertraumes $\Rightarrow$ oft viel zu groß 😞

Störungsansatz

$$C_k(t) = C_k^{(0)} + \lambda C_k^{(1)}(t) + \lambda^2 C_k^{(2)}(t) + \dots$$

einsetzen in DGL und sortieren nach Potenzen von λ liefert eine Hierarchie von DGL

$$\begin{aligned} i\hbar \dot{C}_k^{(0)} &= 0 \\ i\hbar \dot{C}_k^{(1)}(t) &= \lambda \sum_n H_{1kn}(t) e^{i\omega_{kn}(t-t_0)} C_n^{(0)} \\ i\hbar \dot{C}_k^{(2)}(t) &= \lambda \sum_n H_{1kn}(t) e^{i\omega_{kn}(t-t_0)} C_n^{(1)}(t) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Man sieht: die rechte Seite ist eine gegebene Funktion der Zeit die aus einer Ordnung Störungstheorie niedrigerer Bereich berechnet wurde!

λ^1 | erste Ordnung Störungstheorie

$$|\varphi_I(t_0)\rangle = |n\rangle \Rightarrow C_n^{(0)} = 1 \quad C_{k \neq n}^{(0)} = 0$$

$$C_k^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t d\tau \lambda H_{1kn}(\tau) e^{i\omega_{kn}(\tau-t_0)}$$

Damit ergibt sich die Übergangswahrscheinlichkeit

aus dem Eigenzustand $|n\rangle$ von H_0 in den EZ $|k\rangle$ überzugehen nach einer Zeit $t-t_0$

$$P_{n \rightarrow k}(t) = |C_k^{(1)}(t)|^2$$

$$= \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_{t_0}^t d\tau \lambda H_{1kn}(\tau) e^{i\omega_{kn}(\tau-t_0)} \right|^2$$

λ^2 zweite Ordnung Störungstheorie

$$C_k^{(2)}(t) = \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^t d\tau \int_{t_0}^{\tau} d\tau' \lambda^2 \sum_e H_{1ke}(\tau) H_{1en}(\tau')$$

$$* e^{i\omega_{ke}(\tau-t_0)} e^{i\omega_{en}(\tau'-t_0)}$$

etc.

I.2 Harmonische Störung und Fermi's goldene Regel

Als wichtige spezielle Anwendung wollen wir jetzt eine zum Zeitpunkt $t_0=0$ eingeschaltete harmonische Störung betrachten

$$H_1(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 2H_1 \cos(\omega t) & t > 0 \end{cases}$$

$$\omega > 0$$

In erster Ordnung zeitabhängiger Störungstheorie findet man

$$C_k^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} H_{1kn} \int_0^t d\tau e^{i\omega_{kn}\tau} (e^{i\omega\tau} + e^{-i\omega\tau})$$

mit AB $C_n^{(0)}(0) = 1$ $C_{k \neq n}^{(0)} = 0$

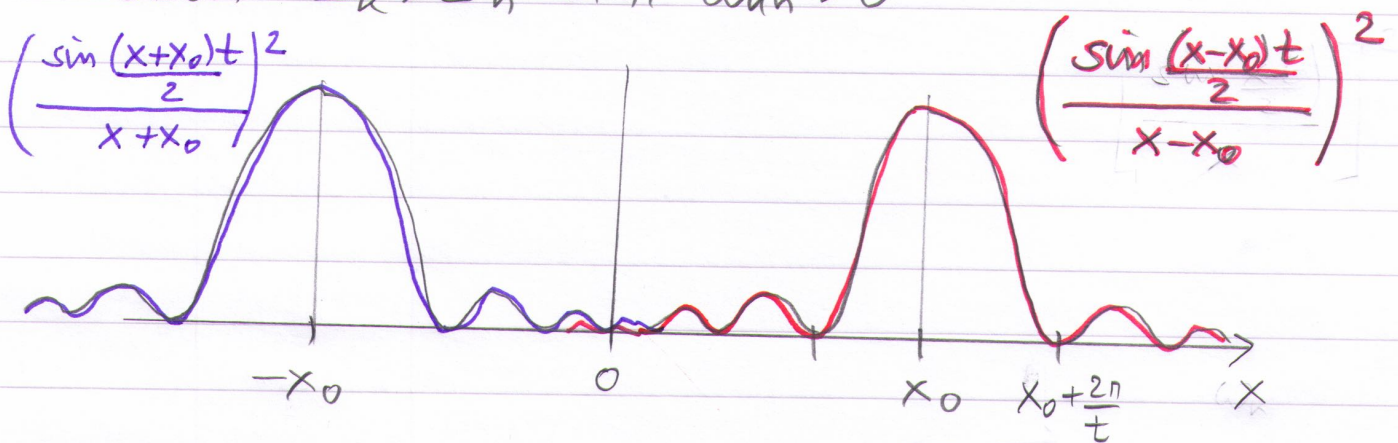
$$C_k^{(1)}(t) = -\frac{H_{1kn}}{\hbar} \left[\frac{e^{i(\omega_{kn}-\omega)t} - 1}{\omega_{kn}-\omega} + \frac{e^{i(\omega_{kn}+\omega)t} - 1}{\omega_{kn}+\omega} \right]$$

mit $e^{i\theta} - 1 = 2ie^{i\frac{\theta}{2}} \sin \frac{\theta}{2} \Rightarrow$

$$C_k^{(1)}(t) = -\frac{2iH_{1kn}}{\hbar} \left\{ e^{i(\omega_{kn}-\omega)\frac{t}{2}} \frac{\sin(\omega_{kn}-\omega)\frac{t}{2}}{\omega_{kn}-\omega} + e^{i(\omega_{kn}+\omega)\frac{t}{2}} \frac{\sin(\omega_{kn}+\omega)\frac{t}{2}}{\omega_{kn}+\omega} \right\}$$

(A) Grenzfall großer Zeiten

Off interessant ist lediglich der Grenzfall großer Zeiten,
OBdA $E_k > E_n$ d.h. $\omega_{kn} > 0$



für $\omega_{kn} > 0$ und $\omega > 0$ und t groß
 $\Rightarrow$ nur Term mit $\sin \frac{(\omega_{kn}-\omega)t}{2}$ relevant!

$$P_{n \rightarrow k}(t) = \frac{4 |H_{1kn}|^2}{t^2} \left[\frac{\sin(\omega_{kn} - \omega) \frac{t}{2}}{\omega_{kn} - \omega} \right]^2$$

Es gilt $\frac{2}{\pi} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin^2(xt/2)}{x^2 t} = \delta(x)$

D.h. im Grenzfall $t \rightarrow \infty$ / genau

$$P_{n \rightarrow k}(t) = \frac{2\pi}{t^2} t |H_{1kn}|^2 \delta(\omega_{kn} - \omega)$$

Bem: falls $E_k < E_n$ ist der Term $\omega_{kn} + \omega$ relevant $\Rightarrow \delta(\omega_{kn} + \omega)$ statt $\delta(\omega_{kn} - \omega)$

Die Übergangswahrscheinlichkeit ist nur für resonante Übergänge, d.h. $\omega_{kn} \approx \omega$, substantiell. Außerdem wächst sie linear in der Zeit t

$\Rightarrow$ Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeit

$$W_{n \rightarrow k} = \frac{P_{n \rightarrow k}}{t} = \frac{2\pi}{t^2} |H_{1kn}|^2 \delta(\omega_{kn} \mp \omega)$$

"-" $\omega_{kn} > 0$ "+" $\omega_{kn} < 0$

Kontinuum von Energien E_k

$$W_{n \rightarrow k} \rightarrow \bar{W}_{n \rightarrow k} = \int_{E_k - \Delta/2}^{E_k + \Delta/2} dN W_{n \rightarrow k}$$

dN infinitesimale Zahl von Zuständen
im Energieintervall $E - \frac{dE}{2}, E + \frac{dE}{2}$

Zustandsdichte: $g(E_n)$

$$dN = g(E_n') dE_n' \quad (\text{hier: } E_k > E_n)$$

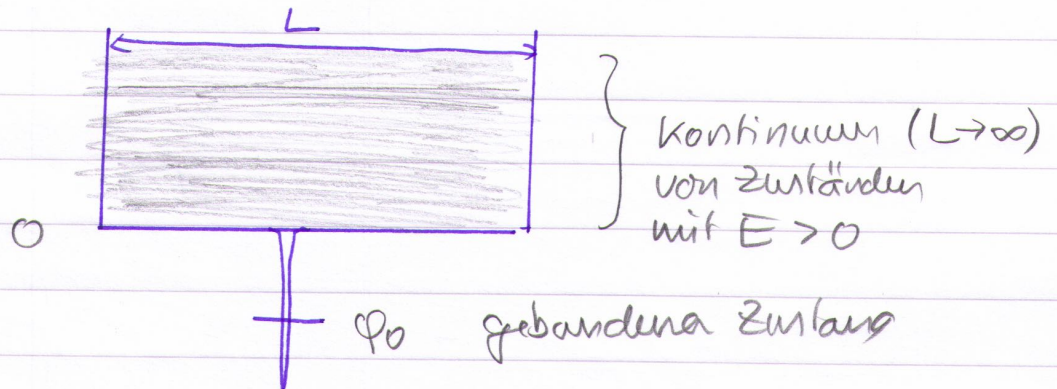
$$\overline{W}_{n \rightarrow k} = \frac{2\pi}{\hbar^2} \int_{E_n - \Delta/2}^{E_n + \Delta/2} dE_n' g(E_n') |H_{1kn}|^2 \delta\left(\frac{E_k' - E_n}{\hbar} - \omega\right)$$

$$\boxed{\overline{W}_{n \rightarrow k} = \frac{2\pi}{\hbar^2} g(E_n + \hbar\omega) |H_{1kn}|^2}$$

Fermi's goldene Regel

Bem: typischerweise gilt für Kontinuum-
zustände $g(E)$ divergent aber
 $g(E) |H_{1kn}|^2$ konvergent

Beispiel:



Kontinuum ist Grenzwert eines Quasikontinuums in
einer Box mit Volumen $V = L^3$ und periodischen
Randbedingungen im Grenzfall $L \rightarrow \infty$

betrachten Übergang von gebundenem Zustand φ_0 in das Kontinuum durch eine hamiltonische Störung

Kontinuumszustand	$\frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{\sqrt{V}}$
gebundener Zustand	$\varphi_0(\vec{r})$

$$H_{1k0} \sim \int d^3r \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{\sqrt{V}} H_1 \varphi_0 \sim \frac{1}{\sqrt{V}}$$

$$|H_{1k0}|^2 \sim \frac{1}{V}$$

In einer Übungsaufgabe wird gezeigt, daß die Zahl der Kontinuumszustände mit Energie zwischen 0 und E ist

$$N_V(E) = \alpha E^{3/2} V \quad g_V(E) = \frac{dN_V(E)}{dE} = \frac{3}{2} E^{1/2} V$$

d.h. $g_V(E) |H_{1k0}|^2 \sim \frac{3}{2} \alpha E^{1/2}$ endlich!

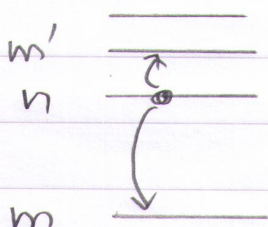
(B) Grenzfall kurze Zeiten

$$P_{n \rightarrow k} \simeq \frac{t^2 |H_{1kn}|^2}{\hbar^2}$$

$$W_{e \rightarrow k} \simeq \frac{|H_{1kn}|^2 t}{\hbar^2}$$

I.3 Emission und Absorption von Strahlung von einem Atom

Eine wichtige Anwendung von Fermi's Goldener Regel ist die Absorption bzw. Emission von Energie eines Atoms in einem äußeren elm. Feld



$\langle \dots \rangle \vec{E}(t)$ elektr. Feld

WW-Hamiltonian eines Elektrons im Zentralpotential mit elm. Feld

$$H = \frac{1}{2m} (\vec{p} - e\vec{A}(\vec{r}, t))^2 + V(r)$$

$$H = H_0 + H_1$$

$$H_0 = \frac{1}{2m} \vec{p}^2 + V(r)$$

vernachlässigbar
(hier ohne Begründung)

$$H_1 = -\frac{e}{2m} (\vec{p} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) + \vec{A}(\vec{r}, t) \cdot \vec{p}) + \frac{e^2}{2m} \vec{A}^2(\vec{r}, t)$$

Coulomb-Eichung

(Coul)

$$\text{div } \vec{A} = 0 \Rightarrow [\vec{p}, \vec{A}(\vec{r}, t)] = 0$$

d.h. $H_1 = -\frac{e}{m} \vec{p} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t)$

Betrachten monochromatische ebene Welle

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = a \vec{\epsilon} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + a^* \vec{\epsilon} e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

mit $|\vec{k}| = \frac{\omega}{c}$; $\vec{\epsilon}$ Einheitsvektor (Polarisation d. Feldes)

Stimulierte Emission $E_n > E_m$

→ nur $e^{-i\omega t}$ Term in H_1 relevant

$$|\langle m | H_1 | n \rangle|^2 = \left(\frac{e}{m}\right)^2 |a|^2 |\langle m | e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \vec{\epsilon} \cdot \vec{p} | n \rangle|^2$$

Dipolnäherung $\lambda = \frac{2\pi}{k} \gg \text{Atomdurchmesser}$

$$\Rightarrow e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \approx 1$$

$$\langle m | \vec{\epsilon} \cdot \vec{p} | n \rangle = ?$$

Mit $[H_0, \vec{X}] = \frac{\hbar}{i} \vec{p}$

$$\Rightarrow \langle m | \vec{\epsilon} \cdot \vec{p} | m \rangle = \frac{im}{\hbar} \langle m | [H_0, \vec{\epsilon} \cdot \vec{X}] | n \rangle$$

$$= \frac{im}{\hbar} (E_m - E_n) \langle m | \vec{\epsilon} \cdot \vec{X} | n \rangle$$

$$= im \omega_{mn} \langle m | \vec{\epsilon} \cdot \vec{X} | n \rangle$$

$$\text{d.h.} \quad |\langle m | \hat{H}_1 | n \rangle|^2 = \omega_{mn}^2 |a|^2 |\langle m | \vec{E} \cdot \vec{d} | n \rangle|^2$$

$$\text{wobei} \quad \vec{d} \equiv e \vec{X} \quad \text{Dipoloperator des Elektrons}$$

Energiedichte des elm. Feldes

$$u = \frac{1}{c} |\vec{S}| = \frac{1}{\mu_0 c} |\vec{E}| |\vec{B}| = \frac{1}{c^2} |\vec{E}|^2 = 2 \epsilon_0 \omega^2 |a|^2$$

damit

$$|\langle m | \hat{H}_1 | n \rangle|^2 = \frac{\omega_{mn}^2 u}{2 \epsilon_0 \omega^2} |\langle m | \vec{E} \cdot \vec{d} | n \rangle|^2$$

$$W_{n \rightarrow m} = \frac{2\pi}{\hbar^2} |\langle m | \hat{H}_1 | n \rangle|^2 \delta(\omega_{mn} - \omega)$$

$$W_{n \rightarrow m} = \frac{\pi}{\hbar^2 \epsilon_0} u |\langle m | \vec{E} \cdot \vec{d} | n \rangle|^2 \delta(\omega_{mn} - \omega)$$

Nun nehmen wir an, daß wir kein monochromatisches Licht aber eine inkohärente Überlagerung verschiedener Frequenzen vorliegen haben. Dann ersetzen wir

$$u \rightarrow \int d\omega \, u(\omega) \dots$$

$$W_{n \rightarrow m} \Rightarrow \int d\omega \frac{\pi}{\hbar^2 \epsilon_0} u(\omega) |\langle m | \vec{E} \cdot \vec{d} | n \rangle|^2 \delta(\omega_{mn} - \omega)$$

$$W_{n \rightarrow m} = \frac{4\pi^2}{\hbar^2} \frac{U(\omega_{mn})}{4\pi\epsilon_0} |\langle m | \vec{E} \cdot \vec{d} | n \rangle|^2$$

Wenn wir nun noch verallgemeinern auf eine Verteilung mit beliebiger (aber transversaler!) Polarisation

$$U \rightarrow \int d\omega \underbrace{\frac{1}{4\pi} \int d\Omega \vec{E}}_{\text{Orientierungsmittelung}} \dots$$

finden wir mit $\vec{E} \cdot \vec{d} = d \cos\vartheta$

$$\frac{1}{4\pi} \int d\Omega \vec{E} |\langle n | \vec{E} \cdot \vec{d} | m \rangle|^2 = \frac{1}{4\pi} \int d\varphi \int d\vartheta \sin\vartheta \cdot$$

$$\cos^2\vartheta |\langle n | \vec{d} | m \rangle|^2$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\vartheta \vartheta^2 |\langle n | \vec{d} | m \rangle|^2 = \frac{1}{3} |\langle n | \vec{d} | m \rangle|^2$$

und damit

$$W_{n \rightarrow m} = \frac{4\pi^2}{3\hbar^2} \frac{U(\omega_{mn})}{4\pi\epsilon_0} |\langle m | \vec{d} | n \rangle|^2$$

$$= B_{nm} U(\omega_{mn})$$

$B_{nm} = B_{mn}$ ist der Einsteinkoeffizient
der stimulierten Emission

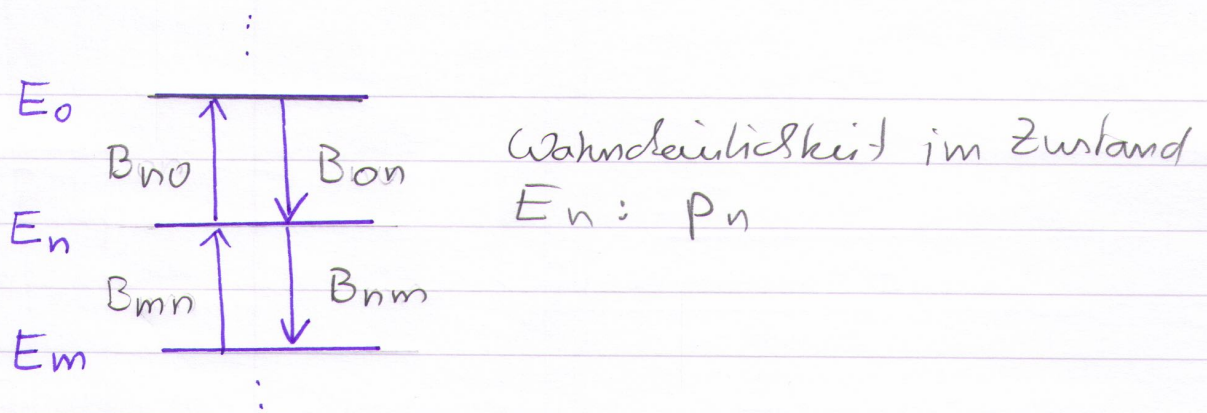
stimulierte Absorption

vertauschen Rollen von Anfangs- und
Endzustand

$B_{nm} = B_{mn}$ Einsteinkoeffizient
der stimulierten Absorption

spontane Emission

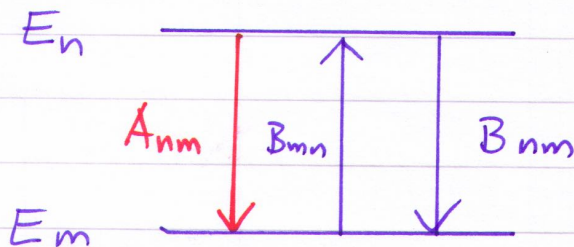
Wenn es nur stimulierte Absorption und
Emission gäbe, wären die Übergangsraten
(Übergangswahrscheinlichkeiten pro Zeit) für
Prozesse von Zuständen niedriger Energie zu
Zuständen höherer Energie dieselben wie bei der
umgekehrten Prozesse. Dann wären im
stationären Zustand die Besetzungswahrschein-
lichkeiten aller Zustände gleich! Das ist im
Widerspruch zur Beobachtung.



$$\dot{p}_n = + \sum_{m \neq n} B_{mn} p_m - \sum_{k \neq n} B_{nk} p_n$$

im stationären Zustand $\dot{p}_n = 0 \Rightarrow p_m = \frac{1}{N} \zeta$

$\Rightarrow$ spontane Emission



abgegebene / aufgenommene Leistung

$p_n A_{nm} h \omega$ spont. Emission

$p_n u(\omega) B_{nm} h \omega$ induz. Emission

$p_m u(\omega) B_{mn} h \omega$ induz. Absorption

$$p_n A_{nm} + p_n u(\omega) B_{nm} \stackrel{!}{=} p_m u(\omega) B_{mn} \quad \text{stationärer Zustand}$$

Besetzungswahrscheinlichkeit folgt Maxwellverteilung

$$p_n = C e^{-\beta E_n} \quad \beta = \frac{1}{k_B T}$$

$\Rightarrow$

$$A_{nm} e^{-\beta E_n} + u(\omega) B_{nm} e^{-\beta E_n} = u(\omega) B_{mn} e^{-\beta E_m}$$

$$\Rightarrow u(\omega) = \frac{A_{nm} / B_{nm}}{e^{\beta \hbar \omega} - 1} \quad E_m - E_n = \hbar \omega$$

Planck'sches Strahlungsgesetz

$$\text{Aus der Ableitung von Planck ist } u(\omega) = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\beta \hbar \omega} - 1}$$

$$\Rightarrow \frac{A_{nm}}{B_{nm}} = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3}$$

$$A_{nm} = \frac{4}{3} \frac{\omega^3}{\hbar c^3 (4\pi\epsilon_0)} |\langle n | \vec{d} | m \rangle|^2$$

Einstein A-Koeffizient
der spontanen Emission