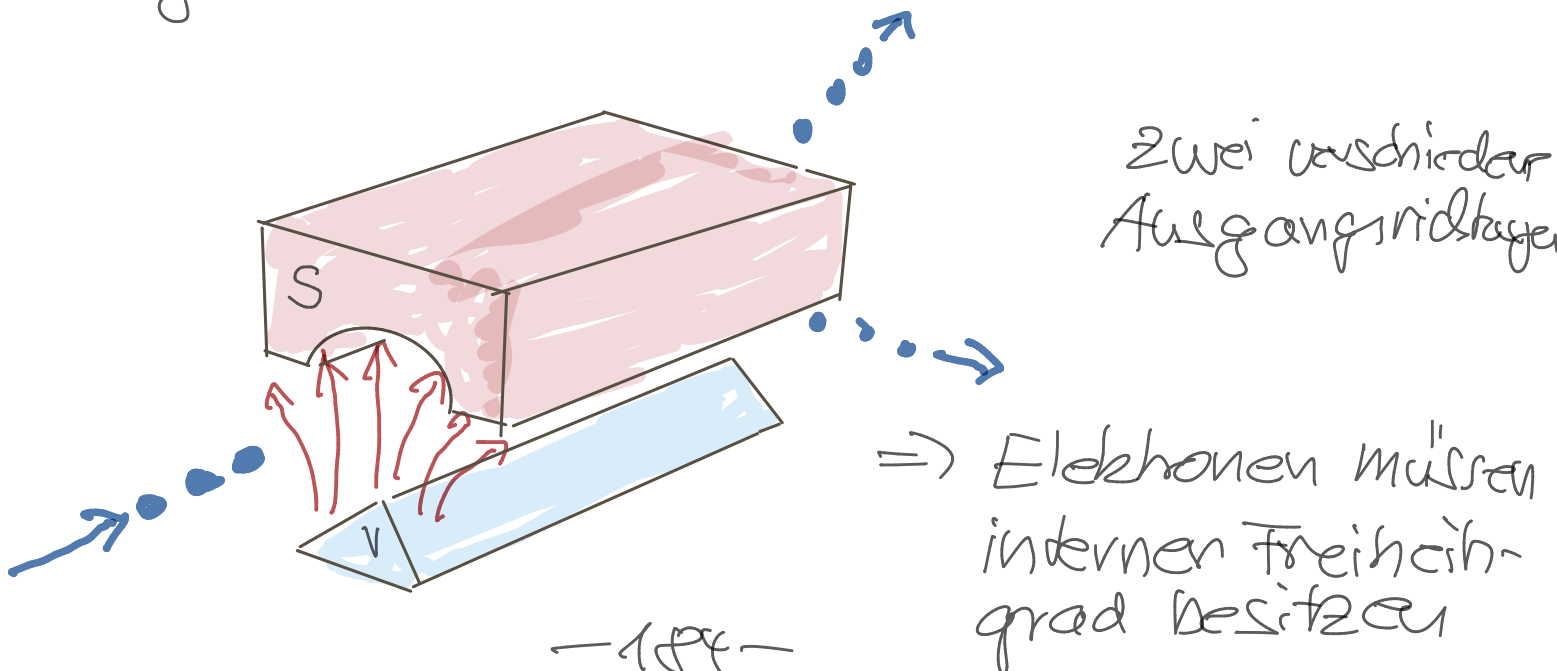


- Die Phase ist unabhängig vom konkreten Weg solange der magnetische Fluß komplett eingeschlossen ist.
 - Die Phase ist auch unabhängig von der Anfangsenergie des Elektrons.
- ⇒ topologische Phase

VIII. Der Spin

8.1 Das Stern Gerlach Experiment

Experiment von Stern und Gerlach (1922)
(Ag Atome) hier: Elektronen



Hilbertraum des Elektrons

$$\mathcal{L}^{(2)}(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^2$$

externe

interne Freiheitsgrade

vollständiger Satz linear unabhängiger
Operatoren in $\mathbb{C}^2$

Pauli Matrizen

(468)

$$\sigma_0 = \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Eigenschaften

$$\sigma_j \in \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$$

$$(i) \quad \sigma_j^\dagger = \sigma_j$$

$$(469) \quad (ii) \quad \text{Sp} \{\sigma_j\} = 0 \quad \text{Det}(\sigma_j) = -1$$

$$(iii) \quad [\sigma_i, \sigma_j] = 2i \varepsilon_{ijk} \sigma_k$$

$$(iv) \quad \{\sigma_i, \sigma_j\} = \sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2\delta_{ij}$$

$$(470) \quad \Rightarrow \quad \sigma_j^2 = \sigma_0 = 1$$

Aus (469)(iii) folgt, daß wir einen Drehimpuls einführen können

$$(471) \quad \begin{aligned} \vec{S} &= \frac{\hbar}{2} (\sigma_x \vec{e}_x + \sigma_y \vec{e}_y + \sigma_z \vec{e}_z) \\ [\hat{S}_i, \hat{S}_j] &= i\hbar \varepsilon_{ijk} \hat{S}_k \\ [\hat{S}^2, \hat{S}_j] &= 0 \end{aligned}$$

Es gilt

$$(472) \quad \begin{aligned} \hat{S}^2 &= \frac{\hbar^2}{4} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) = \frac{3}{4} \hbar^2 \mathbb{1} \\ &= \hbar^2 \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \mathbb{1} \end{aligned}$$

Jeder Zustand aus $\mathbb{C}^2$ ist Eigenzustand von $\hat{S}^2$ mit Eigenwert

$$\hbar^2 \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right)$$

Spin $\frac{1}{2}$ Teilchen

Eigenzustände von $\hat{S}_z$

$$(473) \quad \begin{aligned} |\chi_+\rangle &\equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \hat{S}_z |\chi_+\rangle &= \frac{\hbar}{2} |\chi_+\rangle \\ |\chi_-\rangle &\equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \hat{S}_z |\chi_-\rangle &= -\frac{\hbar}{2} |\chi_-\rangle \end{aligned}$$

Bem: Operatoren in $\mathcal{H} = L^{(2)}(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^2$ die entweder nur auf die Bewegungs-
freiheitsgrade oder nur auf die Spin-
freiheitsgrade wirken, müssen im strengen
Sinne in der Form

$$\vec{p} \otimes \mathbb{I} \quad \text{oder} \quad \mathbb{I} \otimes \vec{S} \quad \text{etc.}$$

geschrieben werden. Zur Vereinfachung
der Notation werden wir das nicht tun.

Teilchen mit n internen Freiheitsgraden

$$\mathcal{H} = L^{(2)}(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^n$$

$$n = 2s + 1$$

s Spinquantenzahl

$$(474) \quad \boxed{\vec{S}^2 = \hbar^2 s(s+1) \mathbb{I}}$$

$$\hat{S}_z |\chi_m\rangle = \hbar m |\chi_m\rangle \quad m = -s, -(s-1), \dots, \dots, (s-1), s$$

8.2 Spin & Rotationen; Gesamt- drehimpuls eines Spin 1/2 Teilchens

Ein Spin 1/2 Teilchen hat eine zwei-
komponentige Orb (Impuls-)raumwellen-
funktion

$$\begin{pmatrix} \psi_1(\vec{r}) \\ \psi_2(\vec{r}) \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} |x_+\rangle \\ |x_-\rangle \end{pmatrix} \text{ Komponenten}$$

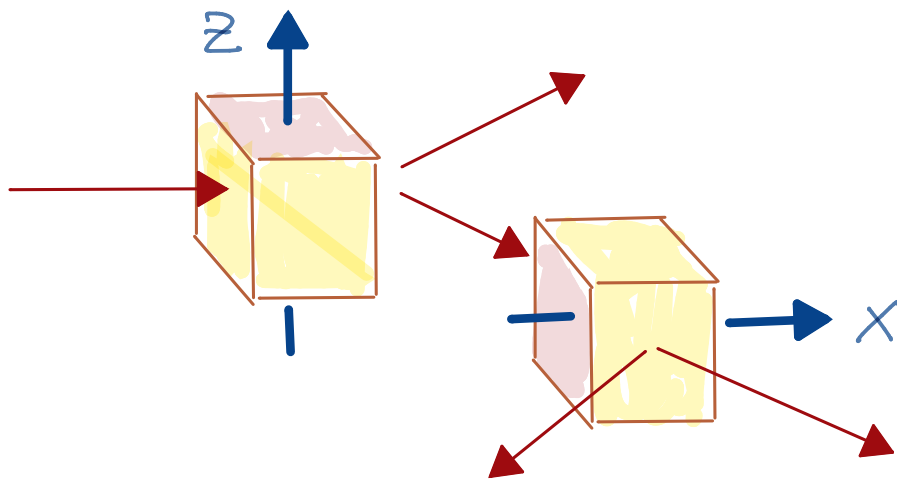
Wie verhält sich diese bei Drehungen, Gilt

$$\hat{D} \begin{pmatrix} \psi_1(\vec{r}) \\ \psi_2(\vec{r}) \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} \psi_1(D^{-1}\vec{r}) \\ \psi_2(D^{-1}\vec{r}) \end{pmatrix}$$

analog zum einkomponentigen Fall?

nein!

Stern Gerlach Magnet in verschiedene Richtungen:



interner Zustand
ändert sich
bei Drehungen
z.B. $z \rightarrow x$

d.h. korrekt ist

$$(475) \quad \hat{D} \begin{pmatrix} \psi_1(\vec{r}) \\ \psi_2(\vec{r}) \end{pmatrix} = \hat{D}^{-1} \begin{pmatrix} \psi_1(\hat{D}^{-1}\vec{r}) \\ \psi_2(\hat{D}^{-1}\vec{r}) \end{pmatrix}$$

(inverse) Drehmatrix in $\mathbb{C}^2$

(inverse) Drehmatrix
in $\mathbb{R}^3$

- 188 -

$$(476) \quad \hat{D}_{\vec{n}}(\theta) = e^{-i\theta \vec{n} \cdot \hat{\vec{S}}/\hbar} e^{-i\theta \vec{n} \cdot \hat{\vec{L}}/\hbar}$$

Drehung im Raum
der internen
Freiheitsgrade

Drehung im Raum
der externen
Freiheitsgrade

- Falls S halbzahlig ist eine Drehung um Vielfache von 4π nötig um den Ausgangszustand zu reproduzieren!

$$(477) \quad S = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots \quad \theta = 4\pi m \quad \hat{D}(4\pi m) = \mathbb{1}$$

Da
(478)

$$[\hat{L}_j, \hat{S}_k] = 0$$

$\Rightarrow$
(479)

$$\hat{D}_{\vec{n}}(\theta) = e^{-i\theta \vec{n} \cdot \hat{\vec{J}}/\hbar}$$

mit
(480)

$$\hat{\vec{J}} = \hat{\vec{L}} + \hat{\vec{S}} = \hat{\vec{L}} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \hat{\vec{S}}$$

$\hat{\vec{J}}$ ist ein Drehimpuls, "Gesamtdrehimpuls"
denn

$$[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = [\hat{L}_i + \hat{S}_i, \hat{L}_j + \hat{S}_j]$$

$$\begin{aligned}
&= [\hat{L}_i, \hat{L}_j] + [\hat{S}_i, \hat{S}_j] \\
&= i\hbar \varepsilon_{ijk} \hat{L}_k + i\hbar \varepsilon_{ijk} \hat{S}_k \\
&= i\hbar \varepsilon_{ijk} \hat{J}_k \quad \square
\end{aligned}$$

d.h.
(481)

$$[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i \varepsilon_{ijk} \hat{J}_k$$

(482)

$$\hat{J}^2 = \hat{L}^2 + \hat{S}^2 + 2\hat{\vec{L}} \cdot \hat{\vec{S}}$$

und
(482)

$$\begin{aligned}
[\hat{J}_i, \hat{J}^2] &= [\hat{L}_i + \hat{S}_i, \underbrace{\hat{L}^2 + \hat{S}^2}_{=0} + \underbrace{2\hat{\vec{L}} \cdot \hat{\vec{S}}}_{=0}] \\
&= [\hat{L}_i + \hat{S}_i, 2\hat{\vec{L}} \cdot \hat{\vec{S}}] \\
&= \underbrace{[\hat{L}_i, 2\hat{L}_k \hat{S}_k]}_{i \varepsilon_{ike} L_e} + \underbrace{[\hat{S}_i, 2\hat{L}_k \hat{S}_k]}_{i \varepsilon_{ike} S_e} \\
&= 2i \varepsilon_{ike} (\underbrace{L_e S_k}_{\text{antisymmetr. in } k, e} + \underbrace{L_k S_e}_{\text{symmetrisch in } k, e}) \equiv 0
\end{aligned}$$

d.h.
(483)

$$[\hat{J}_i, \hat{J}^2] = 0$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned} [\hat{J}^2, \hat{L}^2] &= [\hat{L}^2 + \hat{S}^2 + 2\hat{\vec{L}} \cdot \hat{\vec{S}}, \hat{L}^2] \\ &= 2[\hat{\vec{L}} \cdot \hat{\vec{S}}, \hat{L}^2] = 2[L_j S_j, \hat{L}^2] = 0 \end{aligned}$$

d.h.
(484)

$$[\hat{J}^2, \hat{L}^2] = 0$$

analog
(485)

$$[\hat{J}^2, \hat{S}^2] = 0$$

allerdings gilt

$$(486) \quad [\hat{J}^2, \hat{L}_z] \neq 0 \quad [\hat{J}^2, \hat{S}_z] \neq 0$$

D.h. es gibt zwei Sätze kommutierender Operatoren

(487)

$$(a) \quad \hat{L}^2, \hat{L}_z, \hat{S}^2, \hat{S}_z$$

$$(b) \quad \hat{J}^2, \hat{J}_z, \hat{L}^2, \hat{S}^2$$

ungekoppelte Basis

gekoppelte Basis

Eigenzustände

ungekoppelte Basis

$$|l, m_l, s, m_s\rangle$$

gekoppelte Basis

$$|j, m_j, l, s\rangle$$

$$(488) \quad \begin{aligned} \hat{J}^2 |j, m_j, l, s\rangle &= \hbar^2 j(j+1) |j, m_j, l, s\rangle \\ \hat{J}_z |j, m_j, l, s\rangle &= \hbar m_j |j, m_j, l, s\rangle \end{aligned}$$

Die Zustände der gekoppelten Basis können durch die der ungekoppelten Basis ausgedrückt werden, d.h.

$$(489) \quad |j, m_j, l, s\rangle = \sum_{m_l} \sum_{m_s} C_{m_l, m_s, m_j}^j |l, m_l, s, m_s\rangle$$

$$C_{m_l, m_s, m_j}^j$$

Clebsch-Gordon
koeffizienten

Was sind bei gegebenen l und $s = \frac{1}{2}$ die möglichen Werte von j ?

Dazu betrachten wir

$$\hat{J}_z |j, m_j, l, s\rangle = \sum_{m_l} \sum_{m_s} C_{m_l, m_s, m_j}^j (\hat{L}_z + \hat{S}_z) |l, m_l, s, m_s\rangle$$

$$(490) \quad = \hbar \sum_{m_e} \left\{ C_{m m_e \frac{1}{2}}^j (m_e + \frac{1}{2}) |e m_e\rangle |x_+\rangle \right. \\ \left. + C_{m m_e - \frac{1}{2}}^j (m_e - \frac{1}{2}) |e m_e\rangle |x_-\rangle \right\}$$

Da $\hat{J}_z |j m e s\rangle = \hbar m |j m e s\rangle$

können in der Summe $\sum_{m_e}$ in Gl. (490) nur Terme mit

$$m_e = m \pm \frac{1}{2}$$

auftauchen, d.h. nur

$$C_{m m - \frac{1}{2} \frac{1}{2}}^j = \alpha \quad C_{m m + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}^j = \beta$$

Sind von Null verschieden!

$$(491) \quad |j m e s\rangle = \alpha |e m - \frac{1}{2}\rangle |x_+\rangle \\ + \beta |e m + \frac{1}{2}\rangle |x_-\rangle$$

Jetzt betrachten wir

$$(ii) \quad \hat{J}^2 |j m e s\rangle = \hbar^2 j(j+1) |j m e s\rangle$$

Da $\hat{J}^2 = \hat{L}^2 + \hat{S}^2 + 2\hat{\vec{L}} \cdot \hat{\vec{S}} = \hat{L}^2 + \hat{S}^2 + 2\hat{L}_z \hat{S}_z \\ + 2(\hat{L}_x \hat{S}_x + \hat{L}_y \hat{S}_y)$

Nun gilt

$$\begin{aligned} L_{\mp} \hat{S}_{\pm} &= (\hat{L}_x \mp i \hat{L}_y) (\hat{S}_x \pm i \hat{S}_y) \\ &= \hat{L}_x \hat{S}_x + \hat{L}_y \hat{S}_y \pm i (\hat{L}_x \hat{S}_y - \hat{L}_y \hat{S}_x) \end{aligned}$$

d.h. $\hat{L}_- \hat{S}_+ + \hat{L}_+ \hat{S}_- = 2(\hat{L}_x \hat{S}_x + \hat{L}_y \hat{S}_y)$

und somit

$$(\hat{J}^2 - \hat{L}^2 - \hat{S}^2 - 2\hat{L}_z \hat{S}_z - \hat{L}_- \hat{S}_+ - \hat{L}_+ \hat{S}_-) |j m \ell s\rangle = 0$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} 0 &= (\hat{J}^2 - \hat{L}^2 - \hat{S}^2) [\alpha | \ell m - \frac{1}{2} \rangle | \chi_+ \rangle + \beta | \ell m + \frac{1}{2} \rangle | \chi_- \rangle] \\ &\quad - 2\hat{L}_z \hat{S}_z [\alpha | \ell m - \frac{1}{2} \rangle | \chi_+ \rangle + \beta | \ell m + \frac{1}{2} \rangle | \chi_- \rangle] \\ &\quad - (\hat{L}_- \hat{S}_+ + \hat{L}_+ \hat{S}_-) [\alpha | \ell m - \frac{1}{2} \rangle | \chi_+ \rangle + \beta | \ell m + \frac{1}{2} \rangle | \chi_- \rangle] \end{aligned}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{=0} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{=0}$

$\Rightarrow$ mit $\hbar = 1$

$$\begin{aligned} & (j(j+1) - \ell(\ell+1) - s(s+1)) [\alpha | \ell m - \frac{1}{2} \rangle | \chi_+ \rangle + \beta | \ell m + \frac{1}{2} \rangle | \chi_- \rangle] \\ & - (m - \frac{1}{2}) \alpha | \ell m - \frac{1}{2} \rangle | \chi_+ \rangle - (m + \frac{1}{2}) \beta | \ell m + \frac{1}{2} \rangle | \chi_- \rangle \\ & - \sqrt{\ell(\ell+1) - (m + \frac{1}{2})(m - \frac{1}{2})} (\beta | \ell m - \frac{1}{2} \rangle | \chi_+ \rangle + \alpha | \ell m + \frac{1}{2} \rangle | \chi_- \rangle) \end{aligned}$$

$-194-$ $=0$

Da $|\ell m - \frac{1}{2}\rangle |x_+\rangle$ und $|\ell m + \frac{1}{2}\rangle |x_-\rangle$ orthogonal zueinander sind müssen die Vorfaktoren separat verschwinden.

$$|\ell m - \frac{1}{2}\rangle |x_+\rangle$$

$$s = \frac{1}{2}$$

$$\alpha \left[j(j+1) - \ell(\ell+1) - \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1) - (m - \frac{1}{2}) \right] - \beta \left[\ell(\ell+1) - (m + \frac{1}{2})(m - \frac{1}{2}) \right]^{1/2} = 0$$

$$|\ell m + \frac{1}{2}\rangle |x_-\rangle$$

$$-\alpha \left[\ell(\ell+1) - (m + \frac{1}{2})(m - \frac{1}{2}) \right]^{1/2} + \beta \left[j(j+1) - \ell(\ell+1) - \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1) - (m + \frac{1}{2}) \right] = 0$$

homogenes Gleichungssystem für α und β

∃ Lösung nur falls $\det(M) = 0$

$$\ell(\ell+1) - \cancel{(m + \frac{1}{2})(m - \frac{1}{2})} =$$

$$= \left[j(j+1) - \ell(\ell+1) - \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1) - (m - \frac{1}{2}) \right]$$

$$(492) \quad \cdot \left[j(j+1) - \ell(\ell+1) - \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1) - (m + \frac{1}{2}) \right]$$

$$= \left[j(j+1) - \ell(\ell+1) - \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1) \right]^2 - \cancel{(m - \frac{1}{2})(m + \frac{1}{2})} \\ + j(j+1) - \ell(\ell+1) - \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1) \quad - 195 -$$

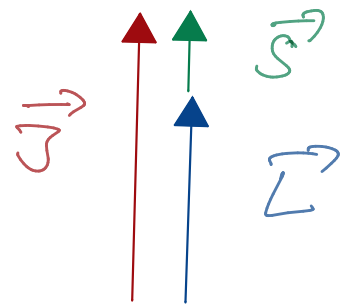
Aus (492) folgen die möglichen Lösungen

(493) $\boxed{j = l + \frac{1}{2}}$

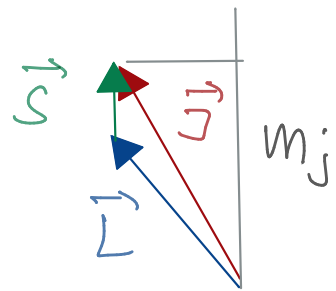
$\boxed{j = l - \frac{1}{2}}$

$$m_j = -j, -(j-1), \dots, (j-1), j$$

$$m_j = l + \frac{1}{2} = j$$



$$m_j < l + \frac{1}{2} = j$$



$\boxed{j = l + \frac{1}{2}}$

(494)

$$C_{m, m \mp \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}}^{l + \frac{1}{2}} = \frac{\left(l \pm m + \frac{1}{2}\right)^{1/2}}{(2l+1)^{1/2}}$$

$\boxed{j = l - \frac{1}{2}}$

(495)

$$C_{m, m \pm \frac{1}{2}, \mp \frac{1}{2}}^{l - \frac{1}{2}} = \mp \frac{\left(l \mp m + \frac{1}{2}\right)^{1/2}}{(2l+1)^{1/2}}$$

Bem.: Für Addition beliebiger Drehimpulse

(496) $\boxed{\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2}$

$\boxed{j_{\min} = |j_1 - j_2|}$

$\boxed{j_{\max} = j_1 + j_2}$