

Eine vorteilhafte Eichung für die q.m. Behandlung geladener Teilchen im elm. Feld ist die

Coulomb Eichung

$$(432) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

in der gilt

$$(433) \quad \left[\vec{p}, \vec{A}(\vec{r}, t) \right] = 0$$

Dann ist

$$H = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A}(\vec{r}, t) \right)^2 + q \Phi(\vec{r}, t) + V(\vec{r})$$

7.3 Geladene Teilchen im Magnetfeld

Eine wichtige Anwendung ist die Bewegung eines Elektrons in einem Magnetfeld konstanter Stärke

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B} = \text{konst} \vec{r}, t$$

Hier $\Phi = 0$ und $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ Coulomb
Eichung

Die Wahl der Coulomb-Eichung legt das
Vektorpotential noch nicht vollständig fest
hier:

$$(434) \quad \vec{A} = -\frac{1}{2} (\vec{r} \times \vec{B}) \quad \text{symmetrische Eichung}$$

check: $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = -\frac{1}{2} \vec{\nabla} \times (\vec{r} \times \vec{B})$

$$= -\frac{1}{2} [(\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{r} - \vec{B} (\vec{\nabla} \cdot \vec{r})]$$

$$= -\frac{1}{2} \left[B_\mu \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_\mu} x_\nu}_{=\delta_{\mu\nu}} - \vec{B} \cdot \vec{3} \right]$$

$$= \frac{1}{2} (3\vec{B} - \vec{B}) = \vec{B} \quad \checkmark$$

Hamiltonoperator in Ortsdarstellung (ü.A.)

$$(435) \quad \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{r}) + \frac{q\hbar}{2mc} \frac{1}{i} (\vec{r} \times \vec{B}) \cdot \vec{\nabla} + \frac{q^2}{8mc^2} (\vec{r} \times \vec{B})^2$$

Nun ist

$$\frac{\hbar}{i} (\vec{r} \times \vec{B}) \cdot \vec{\nabla} = -\frac{\hbar}{i} \vec{B} \cdot (\vec{r} \times \vec{\nabla}) = -\vec{B} \cdot \hat{L}$$

-177-

d.h.

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{r}) - \underbrace{\operatorname{sgn}(q) \frac{\mu}{\hbar} \vec{B} \cdot \vec{L}} + \frac{q^2}{8mc^2} (\vec{r} \times \vec{B})^2$$

(436)

Kopplung des Bahndrehimpulses
an das Magnetfeld

(437)

$$\mu \equiv \frac{|q| \hbar}{2mc}$$

Bohr'sches
Magneton

Klassisches Bild: Energie eines magnetischen
Dipols mit magnetischem Moment $\vec{M}$ im
Magnetfeld

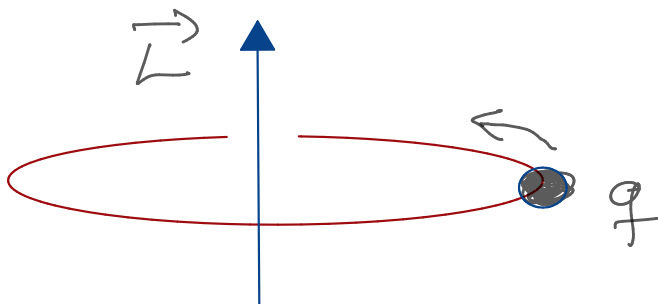
$$H = -\vec{M} \cdot \vec{B}$$

d.h.

(438)

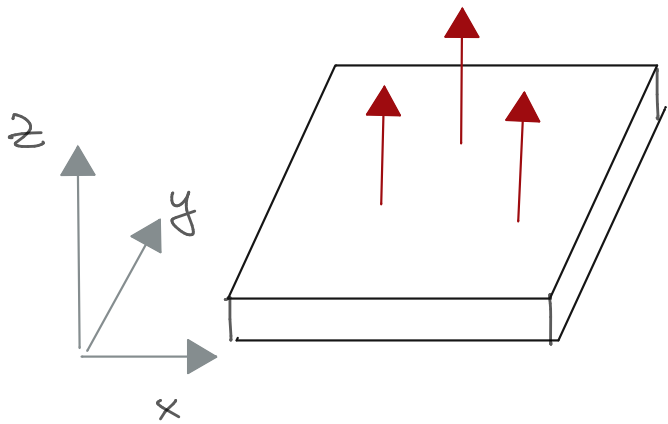
$$\vec{M}_{\text{Bahn}} = \operatorname{sgn}(q) \frac{\mu}{\hbar} \vec{L}$$

Bahn-
magnetisches
Moment



"Ringstrom"
 $\hat{=}$ magnetisches
Moment

Landau Niveaus



2dimensionales
Elektronengas in
einem transversalen
Magnetfeld

Quanten Hall System

$$\vec{B} = (0, 0, B) = B \vec{e}_z \quad V = 0$$

A). Landau Gleichung

$$(439) \quad \vec{\Phi} = 0 \quad \vec{A} = (-yB, 0, 0)$$

Hamiltonoperator

$$(440) \quad \hat{H} = \frac{1}{2m} \left[(\hat{p}_x + \frac{e}{c} y B)^2 + \hat{p}_y^2 \right]$$

suchen Lösungen der stationären SGL

$$\hat{H} \phi_E(x, y) = E \phi_E(x, y)$$

$$(441) \quad \text{Da} \quad [\hat{p}_x, \hat{H}] = 0$$

haben die Eigenzustände die Form

$$(442) \quad \phi_E = e^{ik_x x} \underline{e^{ik_y y} f_E(y)}$$

Einsetzen in stationäre SGL liefert

$$(443) \left[\frac{\hat{p}_y^2}{2m} + \frac{m}{2} \omega_c^2 (y - y_0)^2 \right] f_E(y) = E f_E(y)$$

$\hat{=}$ harmonischer Oszillator um $y_0 = y_0(k_x)$

woher
(444)

$$\omega_c = \frac{|q|B}{mc}$$

$$y_0 = - \frac{c \hbar k_x}{|q|B}$$

Zyklotronfrequenz

Zentrum des
Zyklotronorbits

Damit sind die Eigenenergien

(445)

$$E_n = \hbar \omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

Landau Niveaus

Eigenfunktionen $f_E(y) \hat{=}$ harmonische
Oszillatorfunktionen
um $y_0 = y_0(k_x)$

Oszillatorlänge

(446)

$$l_m = \sqrt{\frac{\hbar}{m \omega_c}} = \sqrt{\frac{\hbar c}{|q| B}}$$

magnetische
Länge

Die Landanniveaus sind bzgl. k_x entartet, d.h. unendlich oft.

B) symmetrische Eichung *

$$(447) \quad \vec{A} = \frac{1}{2} (\vec{B} \times \vec{r}) = \frac{B}{2} (-y, x, 0)$$

$$\Rightarrow \hat{H} = \frac{1}{2m} \left[\left(\hat{p}_x + \frac{q}{2c} y B \right)^2 + \left(\hat{p}_y - \frac{q}{2c} x B \right)^2 \right]$$

dimensionslose Größen

$$\bar{x} = x / l_m \quad \bar{y} = y / l_m$$

$$(448) \quad \hat{H} = \frac{\hbar \omega_c}{2} \left[\left(-i \frac{\partial}{\partial \bar{x}} + \frac{\bar{y}}{2} \right)^2 + \left(-i \frac{\partial}{\partial \bar{y}} - \frac{\bar{x}}{2} \right)^2 \right]$$

komplexe Koordinaten zur einfacheren Notation

$$(449) \quad z = \bar{x} + i\bar{y} = r e^{i\theta} \quad z^* = \bar{x} - i\bar{y}$$

$(\bar{x} = \text{Re}[z], \bar{y} = \text{Im}[z])$ sind unabhängige Variable; formal kann man aber auch (z, z^*) als unabhängige Variable betrachten

damit findet man

$$(450) \quad \frac{\partial}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z^*} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{y}} = \frac{1}{i} \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z^*} \right)$$

Jetzt kann man zwei unabhängige
Leiteroperatoren definieren

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}} + i \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \right) \quad \frac{\partial}{\partial z^*} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}} - i \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \right)$$

(451)

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{z}{2} + 2 \frac{\partial}{\partial z^*} \right) \\ \hat{a}^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{z^*}{2} - 2 \frac{\partial}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

sowie

(452)

$$\begin{aligned} \hat{b} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{z^*}{2} + 2 \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ \hat{b}^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{z}{2} - 2 \frac{\partial}{\partial z^*} \right) \end{aligned}$$

Man zeigt leicht

(453) $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = [\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = 1 \quad [\hat{a}, \hat{b}^{(\dagger)}] = 0$

dann

$$\begin{aligned} \hat{a} \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a} &= \frac{1}{2} \left(\frac{z}{2} + 2 \frac{\partial}{\partial z^*} \right) \left(\frac{z^*}{2} - 2 \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\frac{z^*}{2} - 2 \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{z}{2} + 2 \frac{\partial}{\partial z^*} \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \left[(\partial_{z^*} z^*) + (\partial_z z) \right] = 1$$

$$\begin{aligned} \hat{a} \hat{b}^\dagger - \hat{b}^\dagger \hat{a} &= \frac{1}{2} \left(\frac{z}{2} + 2 \partial_{z^*} \right) \left(\frac{z}{2} - 2 \partial_{z^*} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\frac{z}{2} - 2 \partial_{z^*} \right) \left(\frac{z}{2} + 2 \partial_{z^*} \right) = 0 \end{aligned}$$

Einsetzen von (451) und (452) in $\hat{H}$ (Gl. 448) zeigt, daß $\hat{H}$ nur von $\hat{a}^\dagger, \hat{a}$ abhängt

$$(454) \quad \boxed{\hat{H} = \hbar \omega_c \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right)}$$

Wiederum Landau Niveaus

Entartung bzgl. $\hat{b}^\dagger \hat{b}$!

Drehimpuls in z-Richtung

Aufgrund der Rotationsymmetrie um die z-Achse gilt natürlich

$$(455) \quad [\hat{H}, \hat{L}_z] = 0$$

$$(456) \quad \hat{L}_z = -i \hbar \frac{\partial}{\partial \theta} = \hbar \left(z \frac{\partial}{\partial z} - z^* \frac{\partial}{\partial z^*} \right)$$

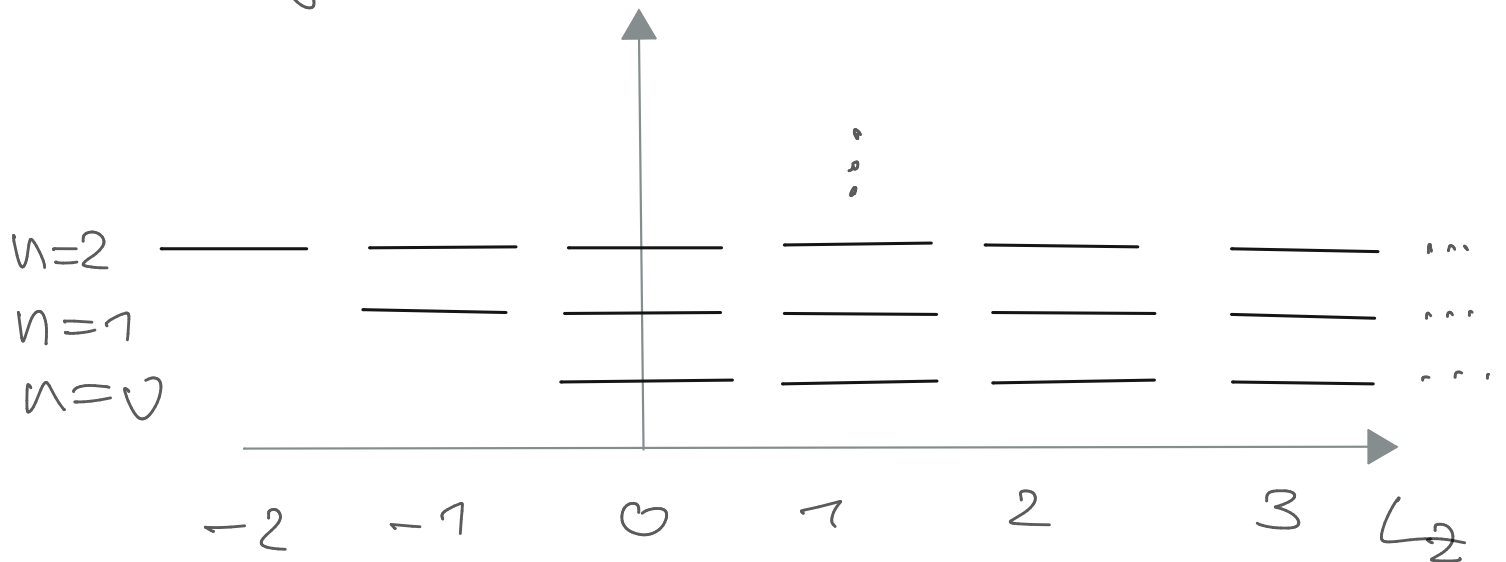
Damit

$$(457) \quad \hat{L}_z = \hbar (b^\dagger b - a^\dagger a)$$

Eigenwerte von $\hat{L}_z = \hbar m$

$$(458) \quad m = -n, -(n-1), -(n-2), \dots$$

Spektrum der Landau-niveaus
(englisch: Landau levels "LL")



Wellenfunktionen

$$L_z = \hbar m \quad E = \hbar \omega_c n$$

$$(459) \quad |n, m\rangle = \frac{b^{\dagger n+m} a^{\dagger m} |0\rangle}{\sqrt{(n+m)! m!}}$$

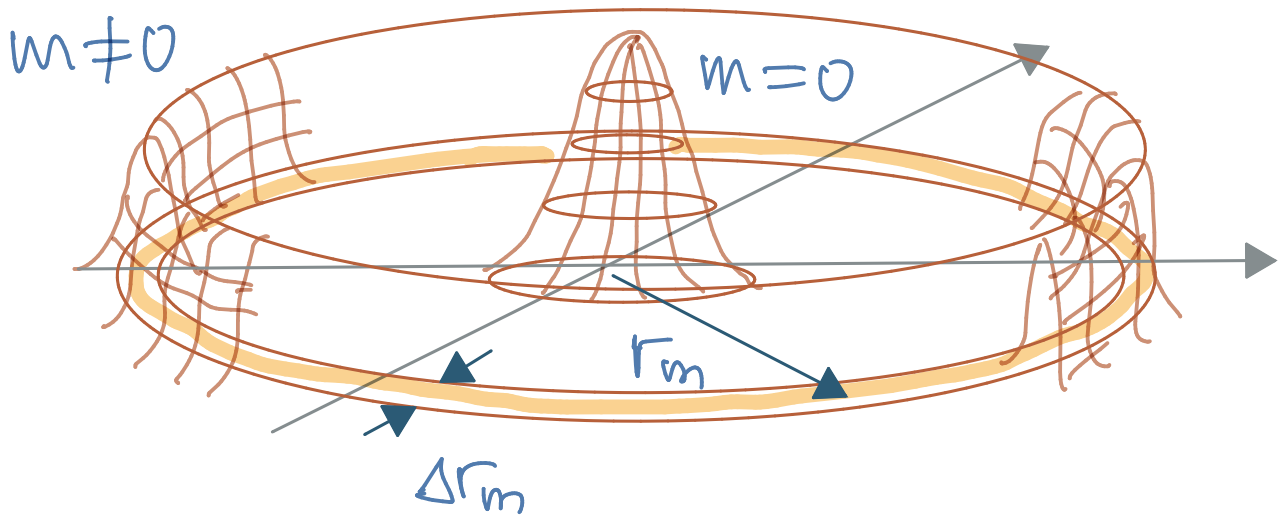
$$(460) \quad \psi_{nm}(z) = \mathcal{N} \left(\frac{z^*}{2} - 2 \frac{\partial}{\partial z} \right)^n \left(\frac{z}{2} - 2 \frac{\partial}{\partial z^*} \right)^{m+n} e^{-|z|^2/4}$$

im niedrigsten Landau Niveau $n=0$

$$\psi_{0m}(z) = \mathcal{N} \left(\frac{z}{2} - 2 \frac{\partial}{\partial z^*} \right)^m e^{-|z|^2/4}$$

(461)

$$\psi_{0m}(z) = \mathcal{N} z^m e^{-|z|^2/4}$$



$$r_m = \ell_m \sqrt{2m}$$

$$\Delta r_m = \frac{\ell_m}{\sqrt{2m}}$$

Fläche

$$A_m = 2\pi r_m \Delta r_m = 2\pi \ell_m^2$$

Entartung in Fläche A

(462)

$$N = \frac{A}{2\pi \ell_m^2} = \frac{AB}{\Phi_0} = \frac{\Phi}{\Phi_0}$$

Wobei
(463)

$$\Phi_0 = \frac{2\pi\hbar c}{|q|}$$

Dirac'sches
Flußquant
(für $|q|=e$)

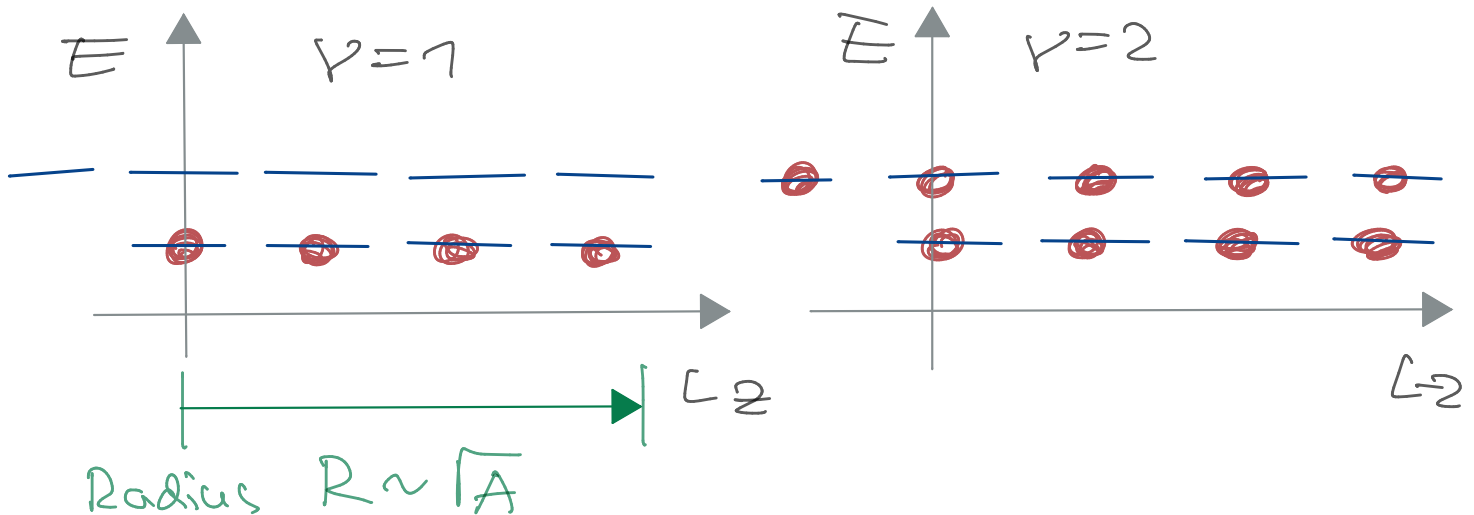
Füllgrad

$$\Phi_0 = 4,737 \times 10^{-7} \text{ Gauss cm}^2$$

$$\nu = \frac{N_e}{N}$$

N_e : Anzahl Elektronen

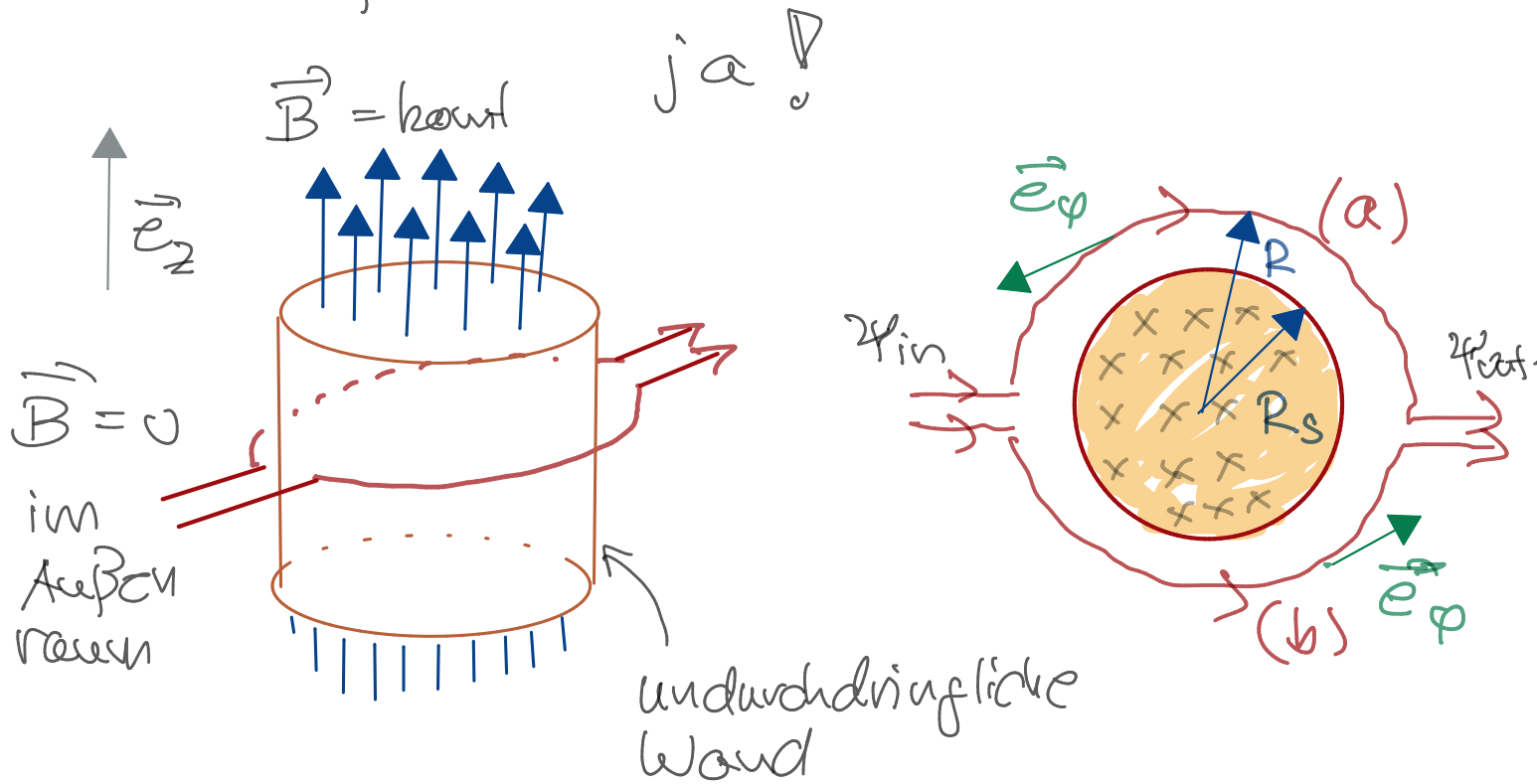
Wir werden später sehen daß jeder Zustand mit nur einem (spin polarisierten) Elektron besetzt werden kann



7.3 Aharonov-Bohm Effekt

Das explizite Auftreten des Vektorpotentials in der Schrödingergleichung (425) hat einige interessante Konsequenzen.

Hat das Vorhandensein eines Vektorpotentials in Raumbereichen in denen $\vec{B} = 0$ eine Konsequenz?



aber
(464)

$$\vec{A} = \frac{B R_s^2}{2R} \vec{e}_\phi = \frac{\Phi_{\text{mag}}}{2\pi R} \vec{e}_\phi$$

für $R \geq R_s$

denn MWGL

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$$

$$\int_{K_R} d\vec{F} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A} = \int_{K_R} d\vec{F} \cdot \vec{B} = \Phi_{\text{mag}}$$

K_R Kreis mit Radius $R \geq R_s$ in (x, y) Ebene

Stokes

$$d\vec{r} = R d\varphi \vec{e}_\varphi$$

$$\oint d\vec{r} \cdot \vec{A} = \Phi_{\text{mag}}$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi R A_\varphi = 2\pi R A_\varphi = \Phi_{\text{mag}} \quad \square$$

Hamiltonoperator für Elektron $q = -e$
auf Bahnen (a) und (b)

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad (465) \quad H^{(a)} &= \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{e B R_s^2}{c 2 R} \right)^2 \\ &= \hat{P}_\varphi \end{aligned}$$

$$\text{b)} \quad (466) \quad H^{(b)} = \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{e B R_s^2}{c 2 R} \right)^2$$

Damit folgt

$$\varphi_{\text{out}}^{(a)} = e^{-\frac{i}{\hbar} H^{(a)} T} \varphi_{\text{in}}^{(a)}$$

$$\varphi_{\text{out}}^{(b)} = e^{-\frac{i}{\hbar} H^{(b)} T} \varphi_{\text{in}}^{(b)}$$

- φ_{in} sei ebene Welle mit Impuls $\hbar k$.
Wir nähern

$$\hat{P}_\varphi \varphi_{\text{in}} \simeq \hbar k \varphi_{\text{in}}$$

$$H^{(a,b)} = \frac{1}{2m} \left(\hat{p}_\varphi^2 \pm \frac{eB R_s^2}{c} \hat{p}_\varphi \right) + \text{const}$$

$$\psi_{\text{out}}^{(a,b)} = e^{-\frac{i}{\hbar} \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \pm \frac{eB R_s^2}{c} \hbar k + \text{const} \right) T} \psi_{\text{in}}^{(a,b)}$$

Nun ist

$$T = \frac{\pi R_m}{\hbar k}$$

und damit

$$\psi_{\text{out}}^{(a,b)} = e^{-i \frac{\hbar k^2}{2m} T} e^{-i \frac{\text{const} \cdot T}{\hbar}} e^{\mp i \frac{eB R_s^2 \pi}{2\hbar}} \psi_{\text{in}}^{(a,b)}$$

Damit sammelt das Elektron auf den beiden Wegen eine verschiedene Phase auf. Für die Differenz gilt

$$(467) \quad \Delta\phi = \frac{eB\pi R_s^2}{\hbar c} = \frac{e}{\hbar c} \Phi_{\text{mag}} = \frac{\Phi_{\text{mag}}}{\Phi_0}$$

Aharonov - Bohm Phase

- Die Phase ist unabhängig vom konkreten Weg solange der magnetische Fluß komplett eingeschlossen ist.
 - Die Phase ist auch unabhängig von der Anfangsenergie des Elektrons.
- $\Rightarrow$ topologische Phase

VIII. Der Spin

8.1 Das Stern Gerlach Experiment

Experiment von Stern und Gerlach (1922)
(Ag Atome) hier: Elektronen

