

VII. Quantenmechanik geladener Teilchen im elm. Feld

7.1 Minimaler Kopplung und Eichtransformation

Aus der klassischen Mechanik / Elektrodynamik ist bekannt, daß die Kraft auf eine (bewegte) Ladung q lautet (Gauß Einheiten)

$$(416) \quad \vec{p} = \vec{F} = q \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right)$$

$\vec{E}$: elektrische Feldstärke

$\vec{B}$: magnetische Feldstärke

Maxwell Gleichungen (Gauß) im Vakuum

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi \rho$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

(417) inhomogenes MWGL

homogenes MWGL

Die homogenen MWGL können formal durch Einführung elm. Potentiale gelöst werden

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}} \quad (418)$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0 \\ &= \vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$(419) \Rightarrow \boxed{\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \Phi}$$

$\vec{A}$ - Vektorpotential ; Φ - Skalares Potential

Wir wissen aus der Elektrodynamik, daß $\vec{A}$ und Φ nicht eindeutig festgelegt sind sondern eine Eichfreiheit besitzen: Die Physik bleibt unverändert unter folgenden

(420) Eichtransformationen

$$\begin{aligned} \vec{A} &\rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \lambda(\vec{r}, t) \\ \Phi &\rightarrow \Phi' = \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \lambda(\vec{r}, t) \end{aligned}$$

führt zu $\vec{B}' = \vec{B}$ und $\vec{E}' = \vec{E}$

Ein geladenes Punktteilchen der Ladung q erfährt im elm. Feld eine Lorentzkraft, d.h.

$$(421) \quad m \frac{d\vec{v}}{dt} = q \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right)$$

Dieses führt auf die klassische Lagrange-funktion

$$(422) \quad L(\vec{x}, \vec{v}, t) = \frac{m}{2} \vec{v}^2 - q\Phi(\vec{r}, t) + \frac{q}{c} \vec{v} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t)$$

Denn die Euler-Lagrange Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial x_\alpha} = 0 \quad \alpha = 1, 2, 3$$

liefern Gl. (427). Damit findet man den kanonischen Impuls eines Teilchens im elm. Feld

$$(423) \quad p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial v_\alpha} = m v_\alpha + \frac{q}{c} A_\alpha$$

$$\vec{p} = m \vec{v} + \frac{q}{c} \vec{A}$$

Die klassische Hamiltonfunktion einer bewegten Ladung im elm. Feld ist damit

$$H = \vec{p} \cdot \vec{v} - L = \frac{m}{2} \vec{v}^2 + q \Phi(\vec{r}, t)$$

$$(424) \quad = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A}(\vec{r}, t) \right)^2 + q \Phi(\vec{r}, t)$$

Das kann in die QMech übersetzt werden

$$(425) \quad \hat{H} = \frac{1}{2m} \left(\hat{\vec{p}} - \frac{q}{c} \vec{A}(\vec{r}, t) \right) \left(\hat{\vec{p}} - \frac{q}{c} \vec{A}(\vec{r}, t) \right) + q \Phi + V$$

wobei wir ein weiteres Potential $V(\vec{r})$ zufügen haben.

Symmetrisierung da $[\hat{\vec{p}}, \vec{A}(\vec{r}, t)] \neq 0$

$\Rightarrow$ Der Hamiltonoperator enthält explizit die elm. Potentiale und ist nicht eichinvariant ??

Die Eichinvarianz kann gerettet werden wenn wir gleichzeitig eine unitäre Trafo der Wellenfunktion $\psi(\vec{r}, t)$ vornehmen

$$\psi \rightarrow \psi' \quad \vec{A} \rightarrow \vec{A}' \quad \Phi \rightarrow \Phi'$$

Eichphasentransformation

$$(426) \quad \begin{aligned} \vec{A}' &= \vec{A} + \vec{\nabla} \lambda & \Phi' &= \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \lambda \\ \psi'(\vec{r}, t) &= \psi(\vec{r}, t) \exp \left\{ i \frac{q}{c} \lambda(\vec{r}, t) \right\} \end{aligned}$$

Die Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = \hat{H} \psi(\vec{r}, t)$$

behält bei simultaner Transformation der elm. Potentiale und der Wellenfunktion gemäß der oben definierten Eichphasentransformation ihre Form

Beweis: (427) $\hat{U} = \exp \left\{ i \frac{q}{c} \lambda(\vec{r}, t) \right\}$ unitär

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi' = i\hbar \left(\frac{\partial U}{\partial t} \psi + U \frac{\partial}{\partial t} \psi \right)$$

$$= i\hbar \left(\frac{iq}{\hbar c} \frac{\partial \lambda}{\partial t} \right) U \psi + i\hbar U H U^{-1} U \psi$$

$$= i\hbar \left[\frac{iq}{\hbar c} \frac{\partial \lambda}{\partial t} + U H U^{-1} \right] \psi$$

was ist $U H U^{-1}$?

$$U H U^{-1} = e^{\frac{i q}{\hbar c} \lambda} H e^{-\frac{i q}{\hbar c} \lambda}$$

In H steckt der Impuls, d.h. $\vec{\nabla}$, der nicht mit $\lambda(\vec{r}, t)$ kommutiert. Mit

$$e^{\frac{i q}{\hbar c} \lambda(\vec{r}, t)} \vec{\nabla} e^{-\frac{i q}{\hbar c} \lambda(\vec{r}, t)} = \left(\vec{\nabla} - \frac{i q}{\hbar c} (\vec{\nabla} \lambda) \right)$$

folgt

$$U H U^{-1} = \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - \frac{q}{c} (\vec{A} + \vec{\nabla} \lambda) \right) \cdot \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - \frac{q}{c} (\vec{A} + \vec{\nabla} \lambda) \right) + q\Phi + V$$

$\underbrace{\vec{A} + \vec{\nabla} \lambda}_{= \vec{A}'} = \vec{A}'$

$\Rightarrow$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi' = \left[\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - \frac{q}{c} \vec{A}' \right) \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - \frac{q}{c} \vec{A}' \right) + q \left(\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \lambda \right) + V \right] \psi'$$

$\underbrace{\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \lambda}_{= \Phi'} = \Phi'$

□

Offensichtlich gilt

$$(428) \quad U \vec{r} U^{-1} = \vec{r} \quad \text{invariant}$$

aber

$$(429) \quad U \vec{p} U^{-1} = \vec{p} - \frac{q}{c} \vec{\nabla} \lambda \quad \text{nicht invariant}$$

Daher ist der kanonische Impuls $\vec{p}$ keine Observable! Jedoch ist der kinetische

Impuls

(430)

$$m \vec{v} \equiv \vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A}$$

eichinvariant und daher eine Observable.

In einer Ü.A. sollen Sie die Vertauschungs-
relationen des kinetischen Impulses
verifizieren

$$(431) \quad [\hat{x}_i, m \hat{v}_j] = i \hbar \delta_{ij}$$
$$[m \hat{v}_i, m \hat{v}_j] = i \hbar \frac{q}{c} \varepsilon_{ijk} B_k$$