

6.4 Das Wasserstoffatom, Teil 1

Das Wasserstoffatom besteht aus 2 Teilchen, ein Proton und ein Elektron, d.h. es handelt sich um ein Zweiteilchenproblem.

$$\text{Proton:} \quad \vec{r}_p, \vec{p}_p \quad q_p = e \quad m_p$$

$$\text{Elektron} \quad \vec{r}_e, \vec{p}_e \quad q_e = -e \quad m_e$$

Wechselwirkungspotential

$$(403) \quad V = V(\vec{r}_e - \vec{r}_p) = - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}_e - \vec{r}_p|}$$

Die Wellenfunktion ist eine zweiteilchenwellenfunktion

$$(404) \quad \psi = \psi(\vec{r}_e, \vec{r}_p)$$

Da Proton und Elektron unterschiedliche Teilchen sind gilt

$$(405) \quad \begin{aligned} [\hat{r}_p, \hat{r}_e] &= [\hat{p}_p, \hat{p}_e] = 0 \\ [\hat{r}_p, \hat{p}_e] &= [\hat{r}_e, \hat{p}_p] = 0 \end{aligned}$$

Da V nur vom Relativabstand abhängt, ist es sinnvoll zu Relativ- und Schwerpunktskoordinaten überzugehen

$$(406) \quad \vec{r} = \vec{r}_e - \vec{r}_p$$

Relativkoordin.

$$\vec{R} = \frac{m_e \vec{r}_e + m_p \vec{r}_p}{m_e + m_p}$$

Schwerpunkt

klassische Hamiltonfunktion in Relativ- und Schwerpunktkoordinaten

$$(407) \quad H = \frac{M}{2} \dot{\vec{R}}^2 + \frac{\mu}{2} \dot{\vec{r}}^2 + V(|\vec{r}|)$$

$$= \frac{1}{2M} \vec{p}_{sp}^2 + \frac{1}{2\mu} \vec{p}^2 + V(|\vec{r}|)$$

mit

$$M = m_e + m_p$$

und

(408)

$$\mu = \frac{m_e m_p}{m_e + m_p} \approx m_e$$

reduzierte Masse

da $m_p \gg m_e$

und
(409)

$$\vec{p}_{sp} = M \dot{\vec{R}}$$

$$\vec{p} = \mu \dot{\vec{r}}$$

als kanonische Impulse des Schwerpunktes und der Relativbewegung. Es gilt

$$(410) \quad \vec{p}_{sp} = \vec{p}_p + \vec{p}_e$$

$$\vec{p} = \frac{m_p}{M} \vec{p}_e - \frac{m_e}{M} \vec{p}_p$$

$$\approx \vec{p}_e$$

$(\hat{\vec{r}}, \hat{\vec{p}})$ und $(\hat{\vec{R}}, \hat{\vec{P}}_{sp})$ bilden unabhängige Paare konjugierter Operatoren. Der Hamilton-Operator kann damit wie folgt geschrieben werden:

$$(411) \quad \hat{H} = \underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{\vec{R}}}_{\text{kinetische Energie des Schwerpunkts}} \underbrace{-\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta_{\vec{r}} + V(r)}_{\text{Problem im Relativkoordinaten-System}}$$

Es gilt

$$(412) \quad [\hat{H}, \hat{\vec{P}}_{sp}] = 0 \Rightarrow \hat{\vec{P}}_{sp} \text{ Erhaltungsgröße}$$

Damit können wir den Ansatz für eine stationäre Lösung machen

$$(413) \quad \psi_E(\vec{r}, \vec{R}) = e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}} \phi_E(\vec{r})$$

was liefert

$$(414) \quad \left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta_{\vec{r}} + V(r) \right] \phi_E(\vec{r}) = \varepsilon \phi_E(\vec{r})$$

(415) mit

$$E = \varepsilon + \frac{\hbar^2 K^2}{2M}$$

↑
Coulombproblem