

n_{e_1} Anzahl der Teilchen in ϕ_{e_1}

n_{e_r} — r — in ϕ_{e_r}

Besetzungszahlen

$$r \leq N$$

$$(672) \quad n_{e_1} + n_{e_2} + \dots + n_{e_r} = N$$

$$\begin{aligned} \phi_{n_{e_1} n_{e_2} \dots n_{e_r}}^{(s)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) &= \quad (673) \\ &= \frac{1}{\sqrt{N! n_{e_1}! n_{e_2}! \dots n_{e_r}!}} \sum_{\tau \in S_N} \phi_{\tau(1)}(\vec{r}_1) \dots \phi_{\tau(N)}(\vec{r}_N) \end{aligned}$$

Man sieht, daß Gl. (671) und (673) etwas unhandlich sind. Es gibt aber eine elegantere Art der "Buchhaltung"

12.5 Der Fock-Raum, Teilchenerzeugungs- und Vernichtungsoperatoren

Basissysteme für N Teilchensysteme von Fermionen (total antisymmetrisch) und Bosonen (symmetrisch) sind durch Angabe der Besetzungszahlen

der Einteilchenzustände vollständig bestimmt.

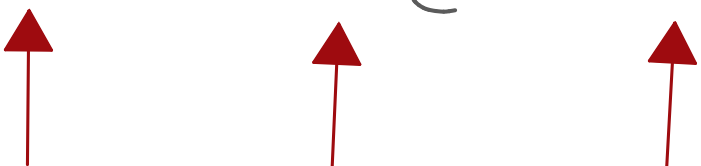
Fermionen $n = 0, 1$

Bosonen $n = 0, 1, 2, \dots, N$

Das wollen wir jetzt geschickt ausnutzen!

Def: Sei $\mathcal{H}$ der Hilbertraum eines Teilchens.
und $\mathcal{H}_\varepsilon^{(n)}$ das n -fache symmetrische
($\varepsilon = "s"$) oder antisymmetrische ($\varepsilon = "as"$)
Tensorprodukt von $\mathcal{H}$. Dann heißt

$$\mathcal{F}_\varepsilon(\mathcal{H}) = \mathcal{H}^{(0)} \oplus \mathcal{H}_\varepsilon^{(1)} \oplus \mathcal{H}_\varepsilon^{(2)} \oplus \dots = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_\varepsilon^{(n)}$$


kein ein zwei
Teilchen Teilchen Teilchen

Fock Raum (über $\mathcal{H}$). Hierbei beschreibt

$\mathcal{H}^{(0)} \equiv \mathbb{C}$ das System ohne Teilchen, d.h.
die physikalische Leere (Vakuum)

Der Zustand ohne Teilchen " $|0\rangle$ "
heißt Vakuumzustand

(A) Fock Raum der Bosonen

Def: Symmetrisierungsoperator

$$(674) \quad \hat{S}_n |\phi_1\rangle |\phi_2\rangle \cdots |\phi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{\tau \in S_n} |\phi_{\tau(1)}\rangle |\phi_{\tau(2)}\rangle \cdots |\phi_{\tau(n)}\rangle$$

Def.: Sei $|f\rangle \in \mathcal{H}$. Die Operatoren $\hat{a}_f$ und $\hat{a}_f^\dagger$ heißen Vernichtungs- bzw. Erzeugungsoperatoren von Teilchen im Zustand $|f\rangle$ wenn gilt:

$$(i) \quad \hat{a}_f : \mathcal{H}^{(n)} \longrightarrow 0$$

$$(675) \quad \hat{a}_f : \mathcal{H}_S^{(n)} \longrightarrow \mathcal{H}_S^{(n-1)} \quad n \in \mathbb{N}$$

$\hat{a}_f$ bildet also einen symmetrischen n -Teilchenzustand auf einen symmetrischen $(n-1)$ -Teilchenzustand ab.

$$(ii) \quad \hat{a}_f \underbrace{\hat{S}_n |\phi_1\rangle |\phi_2\rangle \cdots |\phi_n\rangle}_{\text{Symm. } n\text{-Teilchenzustand}} =$$

$$(676) \quad = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\ell=1}^n \langle f | \phi_\ell \rangle \underbrace{\hat{S}_{n-1} |\phi_1\rangle \cdots |\phi_{\ell-1}\rangle |\phi_{\ell+1}\rangle \cdots |\phi_n\rangle}_{\text{Symmetrischer } n-1\text{-Teilchenzustand}}$$

$$(iii) \quad \hat{a}_f^\dagger : \mathcal{H}_S^{(n)} \longrightarrow \mathcal{H}_S^{(n+1)}$$

$$(677) \quad \hat{a}_f^\dagger |0\rangle = |f\rangle$$

$$\begin{aligned}
 (iv) \quad \hat{a}_f^\dagger \hat{S}_n |\phi_1\rangle \cdots |\phi_n\rangle &= \\
 (678) \quad &= \sqrt{n+1} \hat{S}_{n+1} |f\rangle |\phi_1\rangle \cdots |\phi_n\rangle
 \end{aligned}$$

$\hat{a}_f^\dagger$ ist der zu $\hat{a}_f$ in $\mathcal{F}_S(\mathcal{H})$ hermitisch adjungierte Operator

Satz: Seien $|f\rangle, |g\rangle$ Zustände in $\mathcal{H}$

$$\begin{aligned}
 (679) \quad \Rightarrow \quad [\hat{a}_f, \hat{a}_g] &= [\hat{a}_f^\dagger, \hat{a}_g^\dagger] = 0 \\
 [\hat{a}_f, \hat{a}_g^\dagger] &= \mathbb{1} \langle f|g\rangle
 \end{aligned}$$

Wählen wir speziell eine ONB $\{|\phi_n\rangle\}$

$$\hat{a}_n \equiv \hat{a}_{\phi_n} \quad \langle \phi_n | \phi_m \rangle = \delta_{nm}$$

(680)

$$[\hat{a}_n, \hat{a}_m^\dagger] = \delta_{nm}$$

Beweis von (679):

$$\begin{aligned}
 (i) \quad \hat{a}_g^\dagger \hat{a}_f^\dagger \hat{S}_n |\phi_1\rangle \cdots |\phi_n\rangle &= \\
 &= \hat{a}_g^\dagger \sqrt{n+1} \hat{S}_{n+1} |f\rangle |\phi_1\rangle \cdots |\phi_n\rangle \\
 &= \sqrt{(n+2)(n+1)} \hat{S}_{n+2} |g\rangle |f\rangle |\phi_1\rangle \cdots |\phi_n\rangle
 \end{aligned}$$

$$= \hat{a}_g^\dagger \hat{a}_f^\dagger \hat{S}_n |\phi_1\rangle \dots |\phi_n\rangle$$

$$\Rightarrow [\hat{a}_f^\dagger, \hat{a}_g^\dagger] = 0$$

$$(ii) \quad \hat{a}_f \hat{a}_g^\dagger \hat{S}_n |\phi_1\rangle \dots |\phi_n\rangle =$$

$$= \hat{a}_f \sqrt{n+1} \hat{S}_{n+1} |g\rangle |\phi_1\rangle \dots |\phi_n\rangle$$

$$= \langle f|g\rangle \hat{S}_n |\phi_1\rangle \dots |\phi_n\rangle$$

$$+ \sum_{j=1}^n \langle f|\phi_j\rangle \hat{S}_n |g\rangle |\phi_1\rangle \dots |\phi_{j-1}\rangle |\phi_{j+1}\rangle \dots |\phi_n\rangle$$

andere Seite gilt

$$\hat{a}_g^\dagger \hat{a}_f \hat{S}_n |\phi_1\rangle \dots |\phi_n\rangle =$$

$$= \hat{a}_g^\dagger \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \langle f|\phi_j\rangle \hat{S}_{n-1} |\phi_1\rangle \dots |\phi_{j-1}\rangle |\phi_{j+1}\rangle \dots |\phi_n\rangle$$

$$= \sum_{j=1}^n \langle f|\phi_j\rangle \hat{S}_n |g\rangle |\phi_1\rangle \dots |\phi_{j-1}\rangle |\phi_{j+1}\rangle \dots |\phi_n\rangle$$

$$\Rightarrow [\hat{a}_f, \hat{a}_g^\dagger] = \langle f|g\rangle \quad \square$$

Mit Hilfe der Erzeugungsoperatoren lässt sich jeder symmetrische n -Teilchenzustand aus dem Vakuum generieren!

Seien $\underline{n} = (n_1, n_2, \dots)$ die Besetzungszahlen in den Zuständen $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, \dots$ (ONB)

wobei

(681)

$$\sum_{e=1}^{\infty} n_e = n < \infty$$

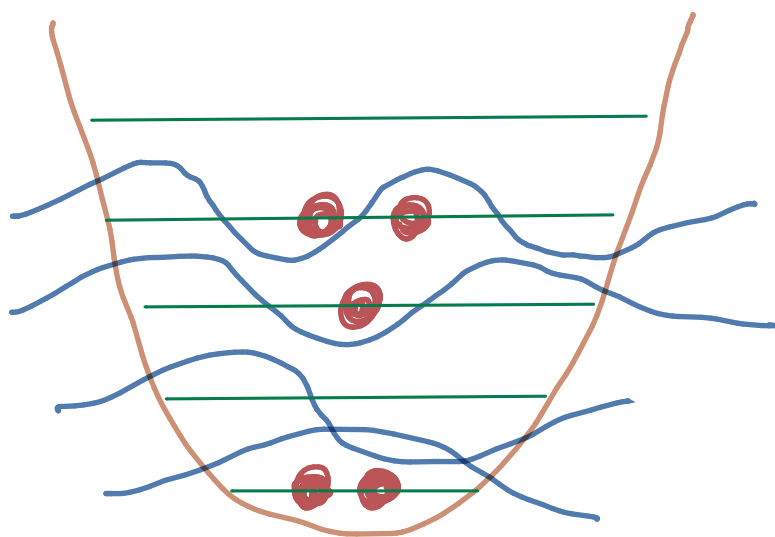
(682)

$$|\Psi_{\underline{n}}\rangle = \prod_{e=1}^{\infty} \frac{(\hat{a}_e^+)^{n_e}}{\sqrt{n_e!}} |0\rangle$$

Symmetrischer n -Teilchenzustand mit
 n_1 Bosonen im Zstd. $|\phi_1\rangle$
 n_2 Bosonen im Zstd. $|\phi_2\rangle$ etc.

Bsp!:

ϕ_4
 ϕ_3
 ϕ_2
 ϕ_1



$\hat{a}_4^{+2}$

$\hat{a}_3^+$

$\hat{a}_1^{+2}$

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2!}} (\hat{a}_1^+)^2 \hat{a}_3^+ \frac{1}{\sqrt{2!}} (\hat{a}_4^+)^2 |0\rangle$$

Def:

Teilchenzahloperator im Zstd. $|\phi_e\rangle$

(683)

$$\hat{n}_e \equiv \hat{a}_e^+ \hat{a}_e$$

wie ham. Osz.

Operator der Gesamtteilchenzahl

$$(684) \quad \hat{n} = \sum_{l=1}^{\infty} \hat{n}_l$$

Bem: • In der nichtrelativistischen Quantenmechanik gilt stets

$$[\hat{n}, H] = 0$$

d.h. die Gesamtteilchenzahl ist eine Erhaltungsgröße

- In der Quantenfeldtheorie werden wir sehen, daß wir auch Prozesse betrachten können bei denen Teilchen erzeugt oder vernichtet werden

(B) Der Fock Raum der Fermionen

Def: Antisymmetrisierungoperator

$$(685) \quad \hat{A}_n |\phi_1\rangle \cdots |\phi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{\tau \in S_n} \text{sgn}(\tau) |\phi_{\tau(1)}\rangle |\phi_{\tau(2)}\rangle \cdots |\phi_{\tau(n)}\rangle$$

$$\hat{A}_n \text{ ist Projektor} \quad \hat{A}_n^2 = \hat{A}_n$$

analog zum Bosonenfall kann man definieren

Def: Sei $|f\rangle \in \mathcal{H}$. Die Operatoren $\hat{C}_f$ und $\hat{C}_f^\dagger$ heißen Vernichtungs- bzw.

Erzeugungsoperatoren von Fermionen im Zustand $|f\rangle$, wenn gilt:

$$(i) \quad \hat{C}_f : \mathcal{H}^{(0)} \rightarrow 0$$

$$(686) \quad \hat{C}_f : \mathcal{H}_{as}^{(n)} \rightarrow \mathcal{H}_{as}^{(n-1)} \quad n \in \mathbb{N}$$

$$(ii) \quad \hat{C}_f \hat{A}_n |\phi_1\rangle \dots |\phi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n (-1)^{j+n} \langle f | \phi_j \rangle \cdot \hat{A}_{n-1} |\phi_1\rangle \dots |\phi_{j-1}\rangle |\phi_{j+1}\rangle \dots |\phi_n\rangle$$

(687)

$$(iii) \quad \hat{C}_f^\dagger : \mathcal{H}_{as}^{(n)} \rightarrow \mathcal{H}_{as}^{(n+1)}$$

$$(688) \quad \hat{C}_f^\dagger |0\rangle = |f\rangle$$

$$(iv) \quad \hat{C}_f^\dagger \hat{A}_n |\phi_1\rangle \dots |\phi_n\rangle = \sqrt{n+1} \hat{A}_{n+1} |f\rangle |\phi_1\rangle \dots |\phi_n\rangle \quad (689)$$

$\hat{C}_f^\dagger$ ist der zu $\hat{C}_f$ adjungierte Operator

Def: Antikommutator

$$(690) \quad \{\hat{A}, \hat{B}\} = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$$

Satz: Seien $|f\rangle$ und $|g\rangle \in \mathcal{H}$ dann gilt

$$(691) \quad \{\hat{C}_f, \hat{C}_g\} = \{\hat{C}_f^\dagger, \hat{C}_g^\dagger\} = 0$$

$$\{\hat{C}_f, \hat{C}_g^\dagger\} = \langle f|g\rangle$$

Beweis: analog zu Bosonen

Für orthonormale Basis $\{|\phi_n\rangle\}$ mit
 $\langle \phi_n | \phi_m \rangle = \delta_{nm}$ $\hat{C}_n \equiv \hat{C} \phi_n$

$$(692) \quad \{\hat{C}_n, \hat{C}_m^\dagger\} = \delta_{nm}$$

Folgerung:

$$(\hat{C}_n^\dagger)^2 = 0$$

Pauli Prinzip

Mit Hilfe der Erzeugungsoperatoren löst sich jeder anti-symmetrische n -Teilchenzustand aus dem Vakuum generieren!

$\underline{n} = (n_1, n_2, \dots)$ mit $n_i \in \{0, 1\}$

und $\sum_{\ell=1}^{\infty} n_\ell = n < \infty$ sei der Vektor

der Besetzungszahlen von Fermionen in den

Zuständen $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, \dots$ dann gilt

$$(693) \quad |\Psi_{\underline{n}}\rangle = (\hat{C}_1^+)^{n_1} (\hat{C}_2^+)^{n_2} \dots |0\rangle$$

Man beachte: für Fermionen $n_1, n_2, \dots \in \{0, 1\}$

Bem:

Pauliprinzip

$$(\hat{C}_e^+)^m |0\rangle = 0 \quad m \geq 2$$

analog zu Bosonen

Def: Teilchenzahloperator im Zustand $|\phi_e\rangle$

$$(694) \quad \hat{n}_e = \hat{C}_e^+ \hat{C}_e \quad e \in \mathbb{N}$$

Eigenschaft für fermionischen Teilchenzahloperator:

$$(695) \quad \hat{n}_e^2 = \hat{n}_e \quad \text{Projektor!}$$

EW

$$\lambda = 0, 1$$

ENDE