

XI Quantenmechanik von Systemen unterscheidbarer Teilchen

11.1 Tensorprodukt von Hilberträumen

Bei der Diskussion des Spins hatten wir bereits das Tensorprodukt von Hilberträumen kennengelernt. Seien $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ separable Hilberträume $|f\rangle \in \mathcal{H}_1$ und $|g\rangle \in \mathcal{H}_2$ dann ist

$$(627) \quad |f\rangle \otimes |g\rangle = |f\rangle |g\rangle = |\varphi\rangle \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$$

$\mathcal{H}$ hat alle Eigenschaften eines Hilbertraumes mit Skalarprodukt

$$(628) \quad |\varphi\rangle, |\phi\rangle \in \mathcal{H} \longrightarrow \langle \varphi | \phi \rangle \in \mathbb{C}$$

Sei

$$|\varphi\rangle = \sum_k \alpha_k |f_k\rangle |g_k\rangle \quad |\phi\rangle = \sum_m \beta_m |h_m\rangle |e_m\rangle$$

wobei $|f_k\rangle, |h_m\rangle \in \mathcal{H}_1$ und $|g_k\rangle, |e_m\rangle \in \mathcal{H}_2$

(629)

$$\langle \psi | \phi \rangle = \sum_{k,m} \alpha_k^* \beta_m \langle f_k | h_m \rangle \langle g_k | l_m \rangle$$

Sind $\{|f_n\rangle\}$ und $\{|g_n\rangle\}$ ONB in $\mathcal{H}_1$ bzw. $\mathcal{H}_2$, dann ist

(630) $\{|f_n\rangle |g_n\rangle\} \quad (k,n) \in \mathbb{N}^2$ ONB in $\mathcal{H}$

Tensorprodukt von Operatoren:

$$\hat{A}_1: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1 \quad \hat{A}_2: \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_2$$

dann ist

(631) $\hat{A}_1 \otimes \hat{A}_2: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$

Notation: $\hat{A}_1 \otimes \hat{A}_2 = \hat{A}_1 \hat{A}_2$ zur Vereinfachung

(632) Es gilt

$$(\hat{A}_1 \otimes \hat{A}_2) \sum_k c_k |f_k\rangle |g_k\rangle = \sum_k c_k (\hat{A}_1 |f_k\rangle) (\hat{A}_2 |g_k\rangle)$$

Ein System aus n unterscheidbaren Teilchen die für sich genommen jeweils durch Vektoren

$$|f^{(i)}\rangle \in \mathcal{H}_i \quad i=1,2,\dots,n$$

beschrieben werden, kann durch einen Vektor

$$(633) \quad |\varphi\rangle = \sum_k \alpha_k |f_k^{(1)}\rangle |g_k^{(2)}\rangle \dots |l_k^{(n)}\rangle$$

in $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_n$ beschrieben werden.

Es gilt das

Schmidt Theorem

Jeder Vektor $|\varphi\rangle \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ mit $\dim(\mathcal{H}_1) = n$; $\dim(\mathcal{H}_2) = m$ kann in der Form

$$(634) \quad |\varphi\rangle = \sum_{k=1}^s \alpha_k |f_k\rangle |g_k\rangle \quad \alpha_k \neq 0$$

geschrieben werden, wobei

$$s \leq \min(n, m) \quad \text{Schmidtzahl}$$

Beweis:

$\{|k\rangle_1\}$ ONB in $\mathcal{H}_1$ $k=1, \dots, n$

$\{|l\rangle_2\}$ ONB in $\mathcal{H}_2$ $l=1, \dots, m$

OBdA $n \leq m$

$$|\varphi\rangle = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m C_{kl} |k\rangle_1 |l\rangle_2$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^n |k\rangle_1 \underbrace{\sum_{l=1}^m c_{kl} |l\rangle_2}_{\equiv \alpha_k |k\rangle_2} \\
&= \sum_{k=1}^n \alpha_k |k\rangle_1 |k\rangle_2 \quad \square
\end{aligned}$$

11.2 Separable und verschränkte Zustände; das Gedankenexperiment von Einstein, Podolsky und Rosen

A) Verschränkte Zustände

Ein System besteht aus zwei Teilsystemen A und B mit $\mathcal{H}_A$ und $\mathcal{H}_B$. Ein reiner Zustand $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ heißt separabel falls er in der Form

$$|\psi\rangle = |\phi\rangle_A |\phi'\rangle_B$$

geschrieben werden kann. Andernfalls heißt er verschränkt

Ein reiner Zustand ist verschränkt falls für die Schmidtzahl gilt $S \geq 2$

Bspl.: 2 Spin $1/2$ Teilchen $\hat{S}_z |\uparrow\rangle = |\uparrow\rangle$
 $\hat{S}_z |\downarrow\rangle = -|\downarrow\rangle$

(i) $|\Psi\rangle = |\uparrow\rangle_A |\uparrow\rangle_B$ separabel

(ii) $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle_A |\uparrow\rangle_B + |\downarrow\rangle_A |\downarrow\rangle_B)$
 verschränkt

(iii) $\frac{1}{\sqrt{4}} (|\uparrow\rangle_A |\uparrow\rangle_B + |\uparrow\rangle_A |\downarrow\rangle_B + |\downarrow\rangle_A |\uparrow\rangle_B + |\downarrow\rangle_A |\downarrow\rangle_B)$

ist nicht verschränkt, denn er ist identisch
 zu

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle_A + |\downarrow\rangle_A) \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle_B + |\downarrow\rangle_B)$$

B) Das EPR Gedankenexperiment

Betrachten zwei Spin $1/2$ Teilchen in einem max.
 verschränkten Zustand, einem sog. EPR
 Zustand

$$(636) \quad |\text{EPR}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle_A |\downarrow\rangle_B - |\downarrow\rangle_A |\uparrow\rangle_B)$$

$|\text{EPR}\rangle$ ist gleichzeitiger Eigenzustand von

$$(637) \quad \hat{S}_x = \hat{S}_x^A + \hat{S}_x^B \quad \hat{S}_y = \hat{S}_y^A + \hat{S}_y^B \quad \hat{S}_z = \hat{S}_z^A + \hat{S}_z^B$$

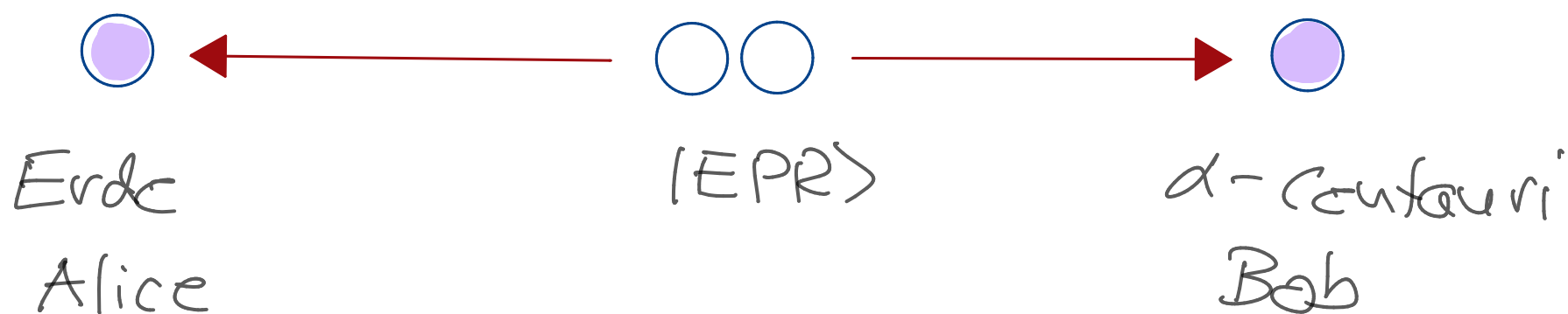
zum EW $\lambda=0$.

Bew.: $\hat{\sigma}_x |\uparrow\rangle = |\downarrow\rangle$ $\hat{\sigma}_x |\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle$

d.h. $\hat{S}_x |\text{EPR}\rangle = \frac{\hbar}{2\sqrt{2}} (\hat{\sigma}_x^A + \hat{\sigma}_x^B) (|\uparrow\rangle_A |\downarrow\rangle_B - |\downarrow\rangle_A |\uparrow\rangle_B)$
 $= \frac{\hbar}{2\sqrt{2}} (|\downarrow\rangle_A |\downarrow\rangle_B - |\uparrow\rangle_A |\uparrow\rangle_B + |\uparrow\rangle_A |\uparrow\rangle_B - |\downarrow\rangle_A |\downarrow\rangle_B) = 0$

analog $\hat{S}_y$. $\hat{S}_z$ ist trivial $\square$

Gedankenexperiment: Trennung der Teilchen auf makroskopische Abstände



Nun führen Alice und Bob Messungen in derselben Basis x, y , oder z durch

Wahrsch.	$\hat{\sigma}_z$		$\hat{\sigma}_z$
$p=0.5$	$+1$	$\longrightarrow$	-1 mit 100%
$p=0.5$	-1	$\longrightarrow$	$+1$ mit 100%

Messung bei A legt instantan Wert von $\hat{\sigma}_z$ bei B fest!

Das ist per se nicht außergewöhnliches. Das hat man auch bei klassischen Korrelationen!

→ Bertelsmann's Socken

Aber Alice hätte sich auch entscheiden können σ_x oder σ_y messen zu können.

Wiederum wären die Ergebnisse perfekt (anti-) korreliert! 

Messung bei Alice legt instantan fest ob die x , y oder z Komponente bei Bob wohl definiert ist. Das scheint der Tatsache zu widersprechen, daß der Spin bei Bob ja nicht gleichzeitig einen wohldefinierten Spin in x , y und z Richtung haben darf!

EPR Paradoxon

Mögliche Alternativen

(a) Die Q.M. ist streng lokal. Dann müssen alle Komponenten des Spins (x , y und z) bei Bob festgelegt sein.

⇒ Es gibt lokale verborgene Parameter

(b) Die Q.M. ist im strengen Sinne nicht lokal

C) Bellsche Ungleichungen

Die sich auftuende Frage ist, ob wir im Prinzip eine klassische Theorie mit verborgenen Parametern von der Quantenmechanik unterscheiden können.

J. Bell 1964:

Ja!

Betrachten Spin-Korrelationen

$\vec{a}, \vec{b}$ Einheitsvektoren

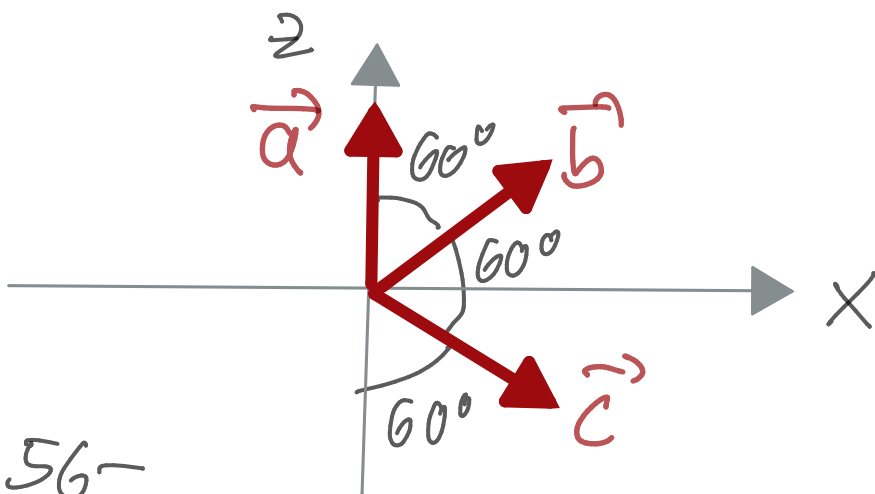
$$(638) \quad E(\vec{a}, \vec{b}) \equiv \langle \vec{a} \cdot \vec{\sigma}_A \vec{b} \cdot \vec{\sigma}_B \rangle$$

Bell hat gezeigt, daß für eine klassische Korrelation (bei verborgenen Parametern) gilt

$$(639) \quad |E(\vec{a}, \vec{b}) - E(\vec{a}, \vec{c})| \leq 1 + E(\vec{b}, \vec{c})$$

Bell'sche Ungleichung

Betrachten wir nicht-orthogonale Richtungen $\vec{a}, \vec{b}$, und $\vec{c}$



Der EPR Zustand (636) ist isotrop, d.h. wir können $\vec{a} = \vec{e}_z$ wählen

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \sigma_z$$

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \quad \varphi \neq (\vec{n}, \vec{e}_z)$$

$$E(\vec{a}, \vec{n}) = \langle \text{EPR} | \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_A \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}_B | \text{EPR} \rangle$$

$$E(\vec{a}, \vec{n}) = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_B - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_B \right]^+ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_A \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}_B$$

$$(640) \quad \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_B - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_B \right]$$

$$= \dots = -\cos\varphi$$

$$\text{D.h.} \quad E(\vec{a}, \vec{b}) = -\cos(60^\circ) = -\frac{1}{2} = E(\vec{b}, \vec{c})$$

$$E(\vec{a}, \vec{c}) = -\cos(120^\circ) = \frac{1}{2}$$

$$(641) \Rightarrow |E(\vec{a}, \vec{b}) - E(\vec{a}, \vec{c})| = 1 \quad \text{EPR} \quad \text{red arrow} \quad 1 + E(\vec{b}, \vec{c}) = \frac{1}{2} \quad \text{EPR 2}$$

$|\text{EPR}\rangle$ verletzt die Bell Ungleichungen!

Experimente von John Clauser (1969) und Alain Aspect (1982) haben die Verletzung

der Bell Ungleichungen bewiesen.

$\Rightarrow \nexists$ lokalen verborgenen Parameter

Dafür erhielten Clauser und Aspect 2022 den Physik Nobelpreis.

Man kann zeigen, daß nur verschränkte Zustände zu einer Verletzung der Bellan-
gleichungen führen.

Der Unterschied zwischen klassischen und Quantenkorrelationen ist noch eklatanter bei Vielteilchenzuständen.

Bsp): GHZ - Zustand
(Greenberger - Horn - Zeilinger)

$$(642) \quad |GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\underset{A}{|\uparrow\rangle} \underset{B}{|\uparrow\rangle} \underset{C}{|\uparrow\rangle} - \underset{A}{|\downarrow\rangle} \underset{B}{|\downarrow\rangle} \underset{C}{|\downarrow\rangle} \right)$$

$\Rightarrow$ siehe Ü.A.

11.3 Verschränkung als Ressource

(A) Das No cloning Theorem

$\nexists$ unitärer Operator $\hat{U}$ der beliebige nicht orthogonale im folgenden Sinne dupliziert, d.h. der für

$$\forall |\varphi\rangle \in \mathcal{H}_1 \quad \text{und} \quad |\phi\rangle \in \mathcal{H}_2$$

mit $\dim(\mathcal{H}_1) = \dim(\mathcal{H}_2)$ folgende Operation ausführt

$$\hat{U} |\varphi\rangle |\phi\rangle = |\varphi\rangle |\varphi\rangle$$

Beweis: $|a\rangle, |b\rangle \in \mathcal{H}_1$ seien orthogonal

Annahme $\hat{U}$ existiert

$$(643) \quad \hat{U} |a\rangle |\phi\rangle = |a\rangle |a\rangle$$

$$\hat{U} |b\rangle |\phi\rangle = |b\rangle |b\rangle$$

Nun betrachten wir einen Zustand, der nicht orthogonal zu $|a\rangle$ und $|b\rangle$ ist, z.B.

$$|\chi\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|a\rangle + |b\rangle)$$

$$\hat{U} |\chi\rangle |\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{U} (|a\rangle |\phi\rangle + |b\rangle |\phi\rangle)$$

$$(644) \quad = \frac{1}{\sqrt{2}} (|a\rangle |a\rangle + |b\rangle |b\rangle)$$

$$\neq |\chi\rangle |\chi\rangle$$

D.h. ein unbekannter Zustand $|\psi\rangle$ kann weder

(i) durch Messung vollständig bestimmt werden

(ii) vervielfacht werden (um die Kopien zu vermessen)

Frage: Ist es dann möglich einen unbekannten Quantenzustand eines Systems von A nach B zu übertragen, ohne das Quantensystem selber zu versenden?

→ Ja! mit Hilfe verschränkter Zustände

B) Quantenteleportation

Nehmen wir an Alice möchte den Zustand eines Spin $1/2$ Systems

$$(645) \quad |\psi\rangle = \alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle$$

an Bob versenden, kennt aber die Werte α, β nicht.

Nehmen wir ferner an, daß Alice und Bob ein verschränktes EPR Paar besitzen (ohne Normierung) - 260 -

$$|\widetilde{\text{EPR}}\rangle = \underbrace{|\downarrow\rangle_A}_{\text{green}} \underbrace{|\downarrow\rangle_B}_{\text{pink}} + \underbrace{|\uparrow\rangle_A}_{\text{green}} \underbrace{|\uparrow\rangle_B}_{\text{pink}} = |\Phi_+\rangle$$

Dies ist einer von 4 maximal verschränkten
EPR oder Bellzuständen

$$|\Phi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\downarrow\rangle|\downarrow\rangle + |\uparrow\rangle|\uparrow\rangle)$$

$$(646) \quad |\Phi_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\downarrow\rangle|\downarrow\rangle - |\uparrow\rangle|\uparrow\rangle)$$

$$|\Psi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\downarrow\rangle|\uparrow\rangle + |\uparrow\rangle|\downarrow\rangle)$$

$$|\Psi_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\downarrow\rangle|\uparrow\rangle - |\uparrow\rangle|\downarrow\rangle)$$

Der Gesamtzustand der 3 Teilchen ist dann

$$|\Psi\rangle|\Phi_+\rangle = (\alpha \underbrace{|\downarrow\rangle}_{\text{green}} + \beta \underbrace{|\uparrow\rangle}_{\text{green}}) (\underbrace{|\downarrow\rangle}_{\text{green}} \underbrace{|\downarrow\rangle}_{\text{pink}} + \underbrace{|\uparrow\rangle}_{\text{green}} \underbrace{|\uparrow\rangle}_{\text{pink}})$$

Alice: 2 Teilchen —

Bob: 2 Teilchen —

$$= \underbrace{(|\downarrow\rangle|\downarrow\rangle + |\uparrow\rangle|\uparrow\rangle)}_{\text{green}} (\alpha \underbrace{|\downarrow\rangle}_{\text{green}} + \beta \underbrace{|\uparrow\rangle}_{\text{green}}) \quad \textcircled{1}$$

$$+ \underbrace{(|\downarrow\rangle|\downarrow\rangle - |\uparrow\rangle|\uparrow\rangle)}_{\text{green}} (\alpha \underbrace{|\downarrow\rangle}_{\text{green}} - \beta \underbrace{|\uparrow\rangle}_{\text{green}}) \quad \textcircled{2}$$

$$+ \underbrace{(|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle + |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle)}_{\text{green}} (\alpha \underbrace{|\uparrow\rangle}_{\text{green}} + \beta \underbrace{|\downarrow\rangle}_{\text{green}}) \quad \textcircled{3}$$

$$+ \underbrace{(|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle)}_{\text{green}} (-\alpha \underbrace{|\uparrow\rangle}_{\text{green}} + \beta \underbrace{|\downarrow\rangle}_{\text{green}}) \quad \textcircled{4}$$

Bob

4 orthogonale Bellzustände
Alice

Alice kann durch Messung ihrer zwei Teilchen alle 4 Zustände eindeutig diskriminieren! Dabei wird der Zustand bei Bob auf den jeweiligen Zustand in Gl. (647) kollabiert.

Nun teilt Alice über einen klassischen Kanal Bob mit welchen der vier Bellzustände sie gemessen hat

- ① $\longrightarrow$ Bob hat bereits den korrekten Zustand
- ② $\longrightarrow$ Bob wendet $\hat{\sigma}_z$ an
- ③ $\longrightarrow$ Bob wendet $\hat{\sigma}_x$ an
- ④ $\longrightarrow$ Bob wendet erst $\hat{\sigma}_z$ und dann $\hat{\sigma}_x$ an

$\Rightarrow$ Zustand ist übermittelt ohne α und β zu kennen

Der Kollaps des Zustandes bei der Messung ist instantan (Nichtlokalität der Q.M.). Wird dann Information schneller als Licht übertragen? Nein!

Ohne klassische Information von Alice hat Bob keine Info!