Hinweis: Bitte laden Sie Ihre Übungsabgabe im Olat-Kurs unter „Übungsaufgaben“ hoch. Nur die mit einem ☗ gekennzeichneten Aufgaben müssen eingereicht werden.

☗ **Aufgabe 24.** *Drehimpuls-Leiteroperatoren (2)* (6 Punkte)
Die Matrizen

$$\hat{L}_x \equiv \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \hat{L}_y \equiv \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \hat{L}_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

stellen die räumlichen Komponenten des Drehimpulses für $l = 1$ in der Basis der Eigenzustände $|m = -1\rangle, |m = 0\rangle, |m = 1\rangle$ von $\hat{L}_z$ dar.

(a) Zeigen Sie, dass der Eigenwert von $\hat{\vec{L}}^2$, $\hbar^2 l(l+1)$ mit $l = 1$ ist.

(b) Bestimmen Sie die Eigenvektoren von $\hat{L}_x, \hat{L}_y$ und $\hat{L}_z$ jeweils zum Eigenwert $m = 0$. Zeigen Sie, dass dieser Satz von Vektoren eine orthogonale, vollständige Basis bildet.

☗ **Aufgabe 25.** *Spin (1)* (6 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die sogenannten Spinmatritzen

$$\hat{s}_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{s}_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \hat{s}_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

den Vertauschungsregeln $[\hat{s}_i, \hat{s}_j] = \mathrm{i}\hbar\epsilon_{ijk}\hat{s}_k$ und $[\hat{s}_i, \hat{\vec{s}}^{\,2}] = 0$ des Drehimpulses genügen. Was ist $\hat{\vec{s}}^{\,2}$ und welche Eigenwerte hat dieser Operator?

(b) Die Eigenzustände (Eigenspinore) von $\hat{s}_z$ sind

$$\Psi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Psi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Welche Linearkombinationen von $\Psi_\pm$ sind Eigenspinoren von $\hat{s}_x$ und $\hat{s}_y$?

☗ **Aufgabe 26.** *Spin (2)* (6 Punkte)
Die allgemeine Spin-Komponente eines Spin-1/2 Systems ist $\hat{s}_{\vec{n}} := \frac{1}{2}\vec{n}\hat{\vec{\sigma}}$, wobei $\vec{n} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\phi)$ der allgemeine Einheitsvektor ist. Bestimmen Sie die Eigenwerte von $\hat{s}_{\vec{n}}$ und einen vollständigen Satz orthonormierter Eigenzustände. Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle\hat{\sigma}_z\rangle$in diesen Eigenzuständen.