Hinweis: Bitte laden Sie Ihre Übungsabgabe im Olat-Kurs unter „Übungsaufgaben“ hoch. Nur die mit einem ☗ gekennzeichneten Aufgaben müssen eingereicht werden.

☗ **Aufgabe 21.** *Summenregel* (8 Punkte)

Betrachten Sie ein Teilchen in einem eindimensionalen Potential $V(x)$ welches nur gebundene Zustände $|E_n\rangle$ zu den Eigenwerten E_n des Hamiltonoperators

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) \tag{1}$$

besitzt, d.h.

$$\hat{H}\,|E_n\rangle = E_n\,|E_n\rangle\,. \tag{2}$$

(a) Zeigen Sie

$$\left[\left[\hat{x}, \hat{H}\right], \hat{x}\right] = \frac{\hbar^2}{m}. \tag{3}$$

(b) Beweisen Sie mit (a) durch geschicktes Einfügen eines Einheitsoperators $\mathbb{1} = \sum_k |E_k\rangle\langle E_k|$ die Summenregel des Dipolmatrixelementes $\hat{d} = e\hat{x}$

$$\sum_k \omega_{kn} |\langle E_n|\,\hat{d}\,|E_k\rangle|^2 = \sum_k \omega_{kn} \langle E_n|\,\hat{d}\,|E_k\rangle \langle E_k|\,\hat{d}\,|E_n\rangle = \frac{\hbar e^2}{2m}, \tag{4}$$

wobei $\hbar\omega_{kn} = E_k - E_n$.

(c) Prüfen Sie die Summenregel explizit für den 1-dimensionalen harmonischen Oszillator

☗ **Aufgabe 22.** *Virialsatz* (6 Punkte)
Gegeben sei der Hamiltonoperator in einer Dimension

$$\hat{H} = \hat{H}_{\text{kin}} + \hat{H}_{\text{pot}} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}). \tag{5}$$

(a) Zeigen Sie, dass in Ortsdarstellung gilt:

$$\frac{1}{i\hbar}\left[\hat{H}, \hat{x}\hat{p}\right] = \hat{x}\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right) - \frac{1}{m}\hat{p}^2. \tag{6}$$

(b) Sein nun φ_E ein Eigenzustand von $\hat{H}$ zur Energie E. Folgern Sie aus (6), dass

$$\left\langle \frac{\hat{p}^2}{2m} \right\rangle_E = \frac{1}{2}\left\langle \hat{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}V(x)\right\rangle_E \tag{7}$$

gilt, wobei $\langle\bullet\rangle_E$ den Erwartungswert im Zustand φ_E bezeichnet.

(c) Nun sei speziell

$$V(\lambda x) = \lambda^n V(x), \tag{8}$$

d.h. $V(x)$ ist eine homogene Funktion vom Grad n. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\left\langle \hat{H}_{\text{kin}} \right\rangle_E = \frac{n}{2} \left\langle \hat{H}_{\text{pot}} \right\rangle_E \qquad \text{(Virialsatz)}. \tag{9}$$

Hinweis: Differentiation von (8) nach λ.

Aufgabe 23. *Drehimpuls-Leiteroperatoren 1* (8 Punkte)
In kartesischen Koordinaten gilt:

$$\hat{\vec{L}}^2 = \frac{1}{2}\left(\hat{L}_+\hat{L}_- + \hat{L}_-\hat{L}_+\right) + \hat{L}_z^2, \tag{10}$$

wobei die $\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm \mathrm{i}\hat{L}_y$ die Leiteroperatoren des Bahndrehimpulses bedeuten.

(a) Leiten Sie mit Hilfe der Darstellung der Drehimpulsoperatoren $\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z$ in sphärischen Polarkoordinaten die Polarkoordinatendarstellung der Leiteroperatoren her.

(b) Leiten Sie mit Hilfe von (10) die Darstellung von $\hat{\vec{L}}^2$ in sphärischen Polarkoordinaten her und zeigen Sie damit, dass sich der 3-dimensionale Laplaceoperator in Kugelkoordinaten durch $\hat{\vec{L}}^2$ ausdrücken lässt:

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\hat{\vec{L}}^2}{\hbar^2 r^2} \tag{11}$$