Hinweis: Bitte laden Sie Ihre Übungsabgabe im Olat-Kurs unter „Übungsaufgaben“ hoch. Nur die mit einem ☗ gekennzeichneten Aufgaben müssen eingereicht werden.

Aufgabe 18. *Hermitesche Polynome*

(a) Beweisen Sie, dass $e^{2\lambda\xi-\lambda^2}$ erzeugende Funktion der Hermiteschen Polynome ist, d. h., dass gilt:

$$e^{2\lambda\xi-\lambda^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} H_n(\xi). \tag{1}$$

Hinweis: $e^{2\lambda\xi-\lambda^2} = e^{\xi^2} e^{-(\lambda-\xi)^2}$

(b) Zeigen Sie damit die Symmetrieeigenschaft $H_n(-\xi) = (-1)^n H_n(\xi)$ und weiterhin, dass die Hermiteschen Polynome folgende Gleichungen erfüllen:

$$H_n'(\xi) = 2nH_{n-1}(\xi), \tag{2}$$

$$2\xi H_n(\xi) = 2nH_{n-1}(\xi) + H_{n+1}(\xi). \tag{3}$$

Hinweis: Differenzieren Sie Gl. (1) nach ξ bzw. λ und vergleichen Sie die Koeffizienten von λ^n.

☗ **Aufgabe 19.** *Kohärente Zustände* (8 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die kohärenten Zustände normiert sind, d.h. $\langle\alpha|\alpha\rangle = 1$, jedoch nicht orthogonal. Was ist $\langle\alpha|\beta\rangle$?

(b) Zeigen Sie mit Hilfe des Baker-Hausdorff Theorems, dass für einen kohärenten Zustand gilt:

$$|\alpha\rangle = \exp\left(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}\right)|0\rangle\,, \tag{4}$$

wobei $|0\rangle$ der Eigenzustand von $\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ zum Eigenwert 0 bedeutet.

(c) Zeigen Sie, dass die kohärenten Zustände übervollständig sind, d.h.

$$\frac{1}{\pi}\int \mathrm{d}^2\alpha\ |\alpha\rangle\langle\alpha| = \mathbb{1}, \tag{5}$$

wobei $\int \mathrm{d}^2\alpha = \int \mathrm{d}u \int \mathrm{d}v = \int_0^\infty \mathrm{d}r\ r\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi$ mit $\alpha = u + iv = re^{i\varphi}$.
Hinweis: Verwenden Sie $\int_0^\infty \mathrm{d}x\ x^n e^{-x} = n!$.

☗ **Aufgabe 20.** *Halber Harmonischer Oszillator* (6 Punkte)
Betrachten Sie zunächst einen harmonischen Oszillator in einer Dimension mit Frequenz ω und

Masse m. Die zugehörigen Energieigenwerte und Funktionen sind E_n und $\phi_n(x)$. Nun werde eine unendlich hohe Potentialstufe bei x= 0 hinzugenommen, sodass

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{für } x \leq 0 \\ \frac{m\omega^2}{2}x^2 & \text{für } x > 0. \end{cases} \tag{6}$$

(a) Begründen Sie, dass die Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators mit Potentialbarriere bis auf einen Normierungsfaktor eine Untermenge der Eigenfunktionen ϕ_n des harmonischen Oszillators sind. Was sind die zugehörigen Eigenenergien?

(b) Sei $\Psi_0(x)$ eine beliebige Wellenfunktion im Potential V(x) zur Zeit $t = 0$. Zeigen Sie, dass zur Zeit $t = T$ die Wellenfunktion in ihr Negatives übergeht, d.h., dass gilt

$$\Psi(x, T) = -\Psi(x, 0) = -\Psi_0(x). \tag{7}$$

T is hierbei die Schwingdauer des Oszillators, d.h. $\omega T = 2\pi$. Was passiert bei $t = 2T$?