Hinweis: Bitte laden Sie Ihre Übungsabgabe im Olat-Kurs unter „Übungsaufgaben“ hoch. Nur die mit einem ☗ gekennzeichneten Aufgaben müssen eingereicht werden.

☗ **Aufgabe 15.** *Streuung an Kastenbarriere (10 Punkte)*

Ein Teilchen der Masse m bewege sich entlang der x-Achse im Potential

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } |x| > a \\ V_0 & \text{für } |x| \leq a. \end{cases},$$

wobei $V_0 > 0$ sei. Für ein Teilchen, das sich von $x = -\infty$ mit vorgegebener Energie $E > 0$ auf die Barriere zubewegt, hat die stationäre Wellenfunktion die Form

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + re^{-ikx} & \text{für } x < -a \\ \beta_+ e^{Kx} + \beta_- e^{-Kx} & \text{für } -a \leq x \leq a \,, \\ te^{ikx} & \text{für } x > a. \end{cases}$$

Hinweis: Je nach Energie ist K reell oder imaginär mit $K = i\,k'$.

(a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsstromdichte des einfallenden, des reflektierten und des transmittierten Teils der Wellenfunktion.

(b) Wie groß sind Reflektions- und Transmissionsvermögen für $0 < E < V_0$ sowie für $E > V_0$

$$R := \left|\frac{j_{\text{refl}}}{j_0}\right|, \quad T := \left|\frac{j_{\text{trans}}}{j_0}\right| \;\; ?$$

(c) Wie groß ist T für $E = V_0$?

Aufgabe 16. *Doppel-Delta-Potential*

Es werden zwei identische attraktive Delta Potentiale im Abstand d voneinander betrachtet:

$$V(x) = -F\left(\delta(x - \frac{d}{2}) + \delta(x + \frac{d}{2})\right),$$

wobei $F > 0$ sei. Lösen Sie die stationäre Schrödingergleichung in den drei Teilgebieten $-\infty < x \leq -d/2$, $-d/2 \leq x \leq d/2$, $d/2 \leq x < \infty$. Finden Sie die gebundenen Zustände und die dazugehörigen Energien.

☗ **Aufgabe 17.** *Gekoppelte Oszillatoren; Normalkoordinaten* (10 Punkte)

In der Vorlesung wurden die Eigenwerte des harmonischen Oszillators hergeleitet. Gegeben seien nun zwei gekoppelte harmonische Oszillatoren mit

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\left(\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2\right) + \gamma m\omega^2 \hat{x}_1 \hat{x}_2, \tag{1}$$

wobei $0 < \gamma < 1$ den Kopplungsgrad charakterisiert.

(a) Wie lauten die Energieeigenwerte für verschwindende Kopplung ($\gamma = 0$)? Welchen Entartungsgrad besitzen die zugehörigen Eigenfunktionen, d.h. wieviel verschiedene Eigenfunktionen gibt es zu jedem Eigenwert?

(b) Führen Sie die durch $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \eta)$ und $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - \eta)$ definierten neuen Variablen ξ und η ein. Wie lautet der Hamiltonoperator in diesen neuen Koordinaten und den zugehörigen Impulsen?

(c) Berechnen Sie die Eigenwerte für $\gamma \neq 0$. Zeigen Sie, dass der Kopplungsterm i.Allg. die in (a) gefundene Entartung aufhebt.