

**Hinweis:** Bitte laden Sie Ihre Übungsabgabe im Olat-Kurs unter „Übungsaufgaben“ hoch. Nur die mit einem ♣ gekennzeichneten Aufgaben müssen eingereicht werden.

♣ **Aufgabe 13.** *Freier Fall* (8 Punkte)

Die eindimensionale Schrödingergleichung bei Vorhandensein einer konstanten Kraft  $F = -mg$  (freier Fall) lautet:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + mgx \right] \psi(x, t). \quad (1)$$

- (a) Leiten Sie aus der obigen Gleichung eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung für die Wellenfunktion im  $k$ -Raum  $\tilde{\psi}(k, t)$  ab.
- (b) Zeigen Sie, dass diese partielle Differentialgleichung für die Wellenfunktion im  $k$ -Raum mit der Substitution  $k = k_0 + \frac{mg}{\hbar}t$  in die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt} \tilde{\psi}(k_0 + \frac{mg}{\hbar}t, t) = -i \frac{\hbar}{2m} (k_0 + \frac{mg}{\hbar}t)^2 \tilde{\psi}(k_0 + \frac{mg}{\hbar}t, t) \quad (2)$$

übergeht.

- (c) Berechnen Sie  $\tilde{\psi}(k, t)$  und zeigen Sie, dass der mittlere Impuls  $\langle \hat{p} \rangle = \hbar \langle k \rangle$  des Teilchens eine lineare Funktion der Zeit  $t$  ist.

**Aufgabe 14.** *Unendliches Kastenpotential*

Gegeben sei ein eindimensionales Kastenpotential mit unendlich hohen Wänden. D.h.

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x \leq L \\ +\infty & \text{sonst.} \end{cases} \quad (3)$$

Die stationären Wellenfunktionen  $\phi_n(x)$  und die zugehörigen Energieeigenwerte  $E_n$  sind in der Vorlesung berechnet worden.

- (a) Zeigen Sie, dass die allgemeine zeitabhängige Lösung der Schrödingergleichung mit der Anfangsbedingung  $\psi(x, 0) = \psi_0(x)$  in der Form

$$\psi(x, t) = \sum_n \alpha_n \phi_n(x) e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} \quad (4)$$

geschrieben werden kann. Wodurch sind die  $\alpha_n$  bestimmt?

- (b) Zum Zeitpunkt  $t = 0$  sei die Wellenfunktion  $\psi(x, t = 0) = \psi_0(x)$ . Die Periode der Grundschwingung sei  $T$ . Zeigen Sie, dass nach einer Zeit von  $t = T/2$  die Funktion in ihr Spiegelbild bezüglich  $x = L/2$  übergeht, d.h. dass gilt  $\psi(x, T/2) = -\psi(L - x, 0) = -\psi_0(L - x)$ . Was passiert nach Vielfachen von  $T$ ?

■ **Aufgabe 15. Freier Fall II (8 Punkte)**

Es werde erneut das Problem aus Aufgabe 9 betrachtet.

- (a)** Man zeige, dass die stationäre Wellenfunktion zur Energie  $E$  gegeben ist durch

$$\phi_E(x) = \mathcal{N} \text{Ai} \left( \frac{x}{l_0} - \frac{E}{\epsilon_0} \right). \quad (5)$$

Hierbei ist  $\mathcal{N}$  eine Normierungskonstante und  $l_0 = (\hbar^2/2m^2g)^{1/3}$  und  $\epsilon_0 = (\hbar^2mg^2/2)^{1/3}$  sind die Standardlänge und -Energie.

$$\text{Ai}(x) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \exp \left( i \left( yx + \frac{1}{3}y^3 \right) \right) \quad (6)$$

ist die Airysche Funktion. Zeigen Sie erst, dass diese der Differentialgleichung

$$\text{Ai}''(x) - x\text{Ai}(x) = 0 \quad (7)$$

genügt. Ihre kleinsten Nullstellen sind  $-2.3381 \dots$ ,  $-4.0879 \dots$ ,  $-5.52055 \dots$ .

- (b)** Nun falle das Teilchen auf eine harte Oberfläche bei  $x = 0$ , d.h. das Potential sei

$$V(x) = \begin{cases} mgx & \text{für } x > 0 \\ +\infty & \text{für } x \leq 0. \end{cases} \quad (8)$$

Was muss für  $\phi(x)$  für  $x \leq 0$  gelten? Was folgt daraus für die erlaubten Energiewerte, wenn man für  $x > 0$  den obigen Ansatz für die Wellenfunktion verwendet?