Hinweis: Bitte laden Sie Ihre Übungsabgabe im Olat-Kurs unter „Übungsaufgaben" hoch. Nur die mit einem ☗ gekennzeichneten Aufgaben müssen eingereicht werden.

☗ **Aufgabe 10.** *Fouriertransformation (8 + 4 Punkte)*

Die Funktionen

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \begin{cases} N_1 \sin(kx) & \text{für } \; |x| \le n\pi/k \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \\ f_2(x) &= N_2 \, \mathrm{e}^{-(x/a)^2} \cos(kx), \\ f_3(x) &= \frac{N_3}{x^2 + a^2} \sin(kx). \qquad (^*) \end{aligned}$$

beschreiben Wellenpakete zu einer festen Zeit.

(a) Bestimmen Sie die Normierungskonstanten N_1, N_2 und N_3, so daß

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx |f(x)|^2 = 1.$$

(b) Bestimmen Sie die Fouriertransformierte (Wellenfunktion im k Raum)

$$f(k) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f(x)$$

(*Hinweis:* f_2 komplexes Gaußsches Integral, f_3 Residuenintegration (*))

(c) Finden Sie geeignete Größen zur Charakterisierung der x- und k-Ausdehnung der Wellenpakete, Δx und Δk. Wie groß ist jeweils $\Delta x \Delta k$?

(*) Mit einem Stern versehene Aufgaben sind optional (4 Zusatzpunkte)

☗ **Aufgabe 11.** *Erwartungswerte (6 Punkte)*

Es ist oft nützlich, neben der Wellenfunktion im Ortsraum auch die Fourier-transformierte Wellenfunktion im k-Raum zu betrachten. In einer Dimension gilt:

$$\Psi(k,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \; e^{-ikx} \Psi(x,t).$$

Zeigen Sie, dass für die Mittelwerte von x^n und k^n gilt:

$$\begin{aligned} \langle x^n \rangle &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx \; x^n |\Psi(x,t)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dk \; \Psi^*(k,t) \left(i \frac{\partial}{\partial k} \right)^n \Psi(k,t), \\ \langle k^n \rangle &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} dk \; k^n |\Psi(k,t)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \; \Psi^*(x,t) \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} \right)^n \Psi(x,t). \end{aligned}$$

Aufgabe 12. *Baker-Hausdorff-Theorem (8 Punkte)*

(a) Man zeige, dass für beliebige Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ und komplexe Zahlen x gilt:

$$e^{x\hat{A}}\hat{B}e^{-x\hat{A}} = \hat{B} + \left[\hat{A},\hat{B}\right]x + \frac{1}{2!}\left[\hat{A},\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right]x^2 + \dots. \tag{1}$$

Hinweis: Man betrachte die Taylorreihenentwicklung der Funktion $\hat{f}(x) = e^{x\hat{A}}\hat{B}e^{-x\hat{A}}$

(b) Unter Verwendung von Gleichung (1) beweise man das Baker-Hausdorff-Theorem

$$e^{\hat{A}}e^{\hat{B}} = e^{\hat{A}+\hat{B}+\frac{1}{2}\left[\hat{A},\hat{B}\right]} = e^{\hat{A}+\hat{B}}e^{\frac{1}{2}\left[\hat{A},\hat{B}\right]}, \tag{2}$$

falls $\left[\hat{A},\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right] = \left[\hat{B},\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right] = 0.$

Hinweis: Man betrachte die Funktion $\hat{f}(x) = e^{x\hat{A}}e^{x\hat{B}}$ und finde für diese eine Differentialgleichung erster Ordnung durch Ableiten von $\hat{f}$ und der Verwendung von $e^{-x\hat{A}}e^{x\hat{A}} = \mathbb{1}$.