"*Wer von der Quantentheorie nicht schockiert ist, hat sie nicht verstanden.*" – Niels Bohr

Aufgabe 1. *Operatoren*
Gegeben seien die folgenden Operatoren:

$$\begin{aligned}
&(i)\ \ \hat{D} = \frac{\partial}{\partial x} \ \text{ mit } \ \hat{D}\psi(x) = \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \\
&(ii)\ \ \hat{\mathbb{1}} \ \text{ mit } \ \hat{\mathbb{1}}\psi(x) = \psi(x) \\
&(iii)\ \ \hat{F} \ \text{ mit } \ \hat{F}\psi(x) = f(x)\psi(x) \\
&(iv)\ \ \hat{P} \ \text{ mit } \ \hat{P}\psi(x) = \psi(x)^3 + 3\psi(x)^2 - 4 \\
&(v)\ \ \hat{Q} \ \text{ mit } \ \hat{Q}\psi(x) = \int_0^1 \mathrm{d}x \psi(x).
\end{aligned}$$

(a) Welche dieser Operatoren sind linear?
(b) Konstruieren Sie für A die inversen $\hat{A}^{-1}$ mit $\hat{A} = \hat{D}, \hat{\mathbb{1}}, \hat{F}$, falls diese existieren.
(c) Zeigen Sie, dass $i\hat{D}$ hermitesch ist.

Aufgabe 2. *Adjungierter Operator*
Zeigen Sie

(a) $\left(\hat{A}\hat{B}\right)^\dagger = \hat{B}^\dagger \hat{A}^\dagger$
(b) $(\hat{A}^\dagger)^\dagger = \hat{A}$
(c) Wenn ein Operator $\hat{B}$ einen Eigenwert b hat mit $b \neq b^*$, dann ist $\hat{B} \neq \hat{B}^\dagger$.

Der *Kommutator* zweier Operatoren $\hat{A}, \hat{B}$ ist definiert als

$$\left[\hat{A}, \hat{B}\right] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}. \tag{1}$$

(d) Zeigen Sie: Falls $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$ und $\hat{B} = \hat{B}^\dagger$, dann gilt

$$\left[\hat{A}, \hat{B}\right]^\dagger = -\left[\hat{A}, \hat{B}\right] \tag{2}$$

Aufgabe 3. *Komplexe Konjugation*
Betrachten Sie einen Operator $\hat{C}$ mit folgender Eigenschaft

$$\hat{C}\psi(x) = \psi(x)^* \tag{3}$$

(a) Ist $\hat{C}$ hermitesch?
(b) Was sind die Eigenfunktionen von $\hat{C}$?
(c) Was sind die Eigenwerte von $\hat{C}$?

Aufgabe 4. *Skalarprodukte und Erwartungswerte*

(a) Zeigen Sie, dass das Skalarprodukt zweier Vektoren $|f\rangle$, $|g\rangle$ in Ortsdarstellung bzw. Impulsdarstellung lautet

$$\int \mathrm{d}x \; f^*(x) g(x) \qquad \text{bzw.} \qquad \int \mathrm{d}k \; \tilde{f}^*(k) \tilde{g}(k). \tag{4}$$

(b) Zeigen Sie, dass aus $\langle f|f\rangle = 1$ folgt

$$\int \mathrm{d}x \; |f(x)|^2 = 1 \qquad \text{bzw.} \qquad \int \mathrm{d}k \; |\tilde{f}(k)|^2 = 1. \tag{5}$$

(c) Betrachten Sie eine Gaußsche Wellenfunktion

$$\Psi(x) = \mathcal{N} \mathrm{e}^{-x^2/d^2}. \tag{6}$$

Wie lautet der Normierungsfaktor $\mathcal{N}$? Was sind die Erwartungswerte

$$(i) \quad \langle \hat{x} \rangle = \langle \Psi | \, \hat{x} \, | \Psi \rangle \tag{7}$$
$$(ii) \quad \langle \hat{x}^2 \rangle = \langle \Psi | \, \hat{x}^2 \, | \Psi \rangle \tag{8}$$
$$(iii) \quad \langle \hat{p} \rangle = \langle \Psi | \, \hat{p} \, | \Psi \rangle \tag{9}$$
$$(iv) \quad \langle \hat{p}^2 \rangle = \langle \Psi | \, \hat{p}^2 \, | \Psi \rangle \, , \tag{10}$$

wobei $\hat{p} = -i\hbar\partial_x$ ist?