Hinweis: Bitte laden Sie Ihre Übungsabgabe im Olat-Kurs unter „Übungsaufgaben“ hoch. Nur die mit einem ☗ gekennzeichneten Aufgaben müssen eingereicht werden.

☗ **Aufgabe 34.** *Spinpräzession* (6 Punkte)
Man betrachte ein Spin-1/2 Teilchen in einem äußeren Magnetfeld $\vec{B}(t) = (0, 0, B(t))$. Bei Vernachlässigung der Bewegung des Teilchens lautet der Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \frac{2\mu}{\hbar}\vec{B}(t) \cdot \hat{\vec{S}}. \tag{1}$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei der Zustand des Teilchens gegeben durch den zwei-komponentigen Vektor

$$\chi(0) = \alpha\chi_+ + \beta\chi_-, \tag{2}$$

wobei $\chi_\pm$ die Eigenzustände von $\hat{S}_z$ mit Eigenwerten $\pm\hbar/2$ bedeuten. Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle \hat{S}_x(t)\rangle$, $\langle \hat{S}_y(t)\rangle$ und $\langle \hat{S}_z(t)\rangle$.

☗ **Aufgabe 35.** *magnetische Resonanz* (8 Punkte)

Man betrachte wiederum ein Spin-1/2 Teilchen in einem äußeren Magnetfeld aus der Aufgabe 34. Es sei nun $B(t) = (B_\perp \cos(\omega t), -B_\perp \sin(\omega t), B_\parallel)$. Der Zustand des Teilchens zur Zeit t kann in der Form

$$\chi(t) = \alpha(t)\chi_+ + \beta(t)\chi_-, \tag{3}$$

geschrieben werden.

(a) Zeigen Sie, dass aus der Schrödingergleichung für $\chi(t)$ mit dem Hamiltonoperator $\hat{H}$ aus Gleichung (1) die Matrixgleichung folgt

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} = -i\begin{pmatrix} \Omega_\parallel & \Omega_\perp e^{i\omega t} \\ \Omega_\perp e^{-i\omega t} & -\Omega_\parallel \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix}, \tag{4}$$

mit $\hbar\Omega_\parallel = \mu B_\parallel$ und $\hbar\Omega_\perp = \mu B_\perp$.

(b) Lösen Sie (4) mit den Anfangsbedingungen $\alpha(0) = 1, \beta(0) = 0$.

(c) Unter welcher Bedingung an die Frequenz ω und zu welchen Zeiten gilt $\chi(t) \propto \chi_-$?

☗ **Aufgabe 36.** *Zeemaneffekt - Störungstheorie* (8 Punkte)
Das magnetische Moment eines Elektrons in einem Zentralpotential setzt sich zusammen aus einem Bahndrehimpuls und einem Spinanteil:

$$\hat{\vec{\mu}} = \mu_B(\hat{\vec{L}} + 2\hat{\vec{S}})$$

wobei $\mu_B := e\hbar/2m$ das Bohrsche Magneton bedeutet. Die Energie dieses magnetischen Moments in einem Magnetfeld $\vec{B}$ ist

$$\hat{H}_Z = -\hat{\vec{\mu}} \cdot \vec{B}.$$

Für kleine Magnetfeldstärken führt $\hat{H}_Z$ zu einer Aufspaltung der entarteten Zustände mit festem l und j. Berechnen Sie diese Aufspaltung in einem konstanten, homogenen Magnetfeld $\vec{B} = (0, 0, B)$ für $l = 1$ und $j = l - s = 1/2$ in erster Ordnung Störungstheorie.

Aufgabe 37. *modifiziertes Coulombpotential - Störungstheorie*
Aufgrund quantenelektrodynamischer Korrekturen ist das Coulombpotential bei kleinen Abständen gemäß

$$\frac{1}{r} \to \frac{1}{r}\left[1 + \frac{\alpha}{3\pi}\int_0^1 \frac{dy}{y}\left(1 + \frac{1}{2}y\right)\sqrt{1-y}\ \exp\left\{-\frac{r/a_e}{\alpha\sqrt{y}}\right\}\right]$$

modifiziert, wobei $\alpha = 1/137.036...$ die Feinstrukturkonstante und a_e der Bohrsche Radius ist. Berechnen Sie in erster Ordnung Störungstheorie die Verschiebung der Grundzustandsenergie des Wasserstoffatoms. Der Spin des Elektrons und die damit zusammenhängende Entartung sind hierbei irrelevant und sollen vernachlässigt werden.
Hinweis: Benutzen Sie zur Approximation des auftretenden Integrals, dass $\alpha \ll 1$ ist und

$$\int_0^1 dy \left(1 + \frac{1}{2}y\right)\sqrt{1-y} = \frac{4}{5}.$$