Hinweis: Bitte laden Sie Ihre Übungsabgabe im Olat-Kurs unter „Übungsaufgaben“ hoch. Nur die mit einem ☗ gekennzeichneten Aufgaben müssen eingereicht werden.

☗ **Aufgabe 30.** *Zeitabhängiger Hamiltonoperator: exakte Lösung* (6 Punkte)
Betrachten Sie den angetriebenen harmonischen Oszillator mit dem Hamiltonoperator

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \frac{\hat{p}^2}{2m} + \tfrac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 - F\hat{x}\cos(\Omega t) && (1)\\ &= \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \tfrac{1}{2}\right) - \hbar A\left(\hat{a}^\dagger + \hat{a}\right)\cos(\Omega t) \quad \text{mit } A = \frac{F}{\sqrt{2m\hbar\Omega}}. && (2)\end{aligned}$$

Die Energieeigenzustände des harmonischen Oszillators (mit $F = 0$) sind $|n\rangle$ für $n = 0, 1, 2, ...$ und

$$\hat{a}\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle\,, \quad \hat{a}^\dagger\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle\,. \tag{3}$$

Zeigen Sie, dass der Zustand

$$|\psi_0(t)\rangle = e^{-i\theta(t)}\,e^{-\frac{1}{2}|\alpha(t)|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(t)^n}{\sqrt{n!}}\,|n\rangle \tag{4}$$

eine Lösung der Zeitabhängigen Schrödingergleichung ist, falls $\theta(t)$ und $\alpha(t)$ folgende Bedingungen erfüllen

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}(t) &= -i\omega\alpha(t) + iA\cos(\Omega t) && (5)\\ \dot{\theta}(t) &= \frac{\omega}{2} - \frac{A}{2}\Big(\alpha(t) + \alpha(t)^*\Big)\cos(\Omega t)\,. && (6)\end{aligned}$$

☗ **Aufgabe 31.** *Runge-Lenz Vektor* (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass der Runge-Lenz Vektor

$$\hat{\vec{F}} = \frac{1}{2m}\left(\hat{\vec{p}}\times\hat{\vec{L}} - \hat{\vec{L}}\times\hat{\vec{p}}\right) - \frac{\alpha}{\hat{r}}\hat{\vec{r}} \tag{7}$$

mit dem Hamiltonoperator $\hat{H} = \hat{\vec{p}}^{\,2}/2m - \alpha/r$ des Coulomb Potentials kommutiert.

☗ **Aufgabe 32.** *Kinetischer Impuls* (4 Punkte)
Im Gegensatz zum kanonischen Impuls $\hat{\vec{p}}$ ist der kinetische Impuls $m\hat{\vec{v}} = \hat{\vec{p}} - \frac{q}{c}\vec{A}$ eines geladenen Teilchens in einem äußeren elektromagnetischen Feld invariant unter Eichtransformationen. Zeigen Sie, dass für $\hat{\vec{v}}$ folgende Vertauschungsregeln gelten:

$$\begin{aligned}[\hat{x}_i, m\hat{v}_j] &= i\hbar\delta_{ij} && (8)\\ [m\hat{v}_i, m\hat{v}_j] &= i\hbar\frac{q}{c}\epsilon_{ijk}B_k, && (9)\end{aligned}$$

wobei $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$.

Aufgabe 33. *Landau Niveaus - alternativer Zugang*
Es sei $\vec{B} = (0, 0, B)$ ein konstantes, homogenes Magnetfeld in z-Richtung. Das elektrische Feld und das skalare Potential seien gleich Null, so dass das Vektorpotential $\vec{A}$ nur eine Funktion des Ortes ist. Zeigen Sie, dass dann der Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left(\hat{\vec{p}} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2 = \hat{H}_\perp + \hat{H}_\parallel \tag{10}$$

sich in einen transversalen und longitudinalen Teil aufspalten lässt mit

$$\hat{H}_\perp = \frac{m}{2}\left(\hat{v}_x^2 + \hat{v}_y^2\right), \qquad \hat{H}_\parallel = \frac{m}{2}\hat{v}_z^2. \tag{11}$$

Zeigen Sie, dass die beiden Teile kommutieren, d.h. $[\hat{H}_\perp, \hat{H}_\parallel] = 0$. Definieren Sie die Operatoren

$$\hat{Q} = \frac{\sqrt{m/M}}{\omega_c}\hat{v}_x, \qquad \hat{P} = \sqrt{mM}\hat{v}_y, \tag{12}$$

wobei $\omega_c = qB/mc$ die Zyklotronfrequenz ist. Zeigen Sie, dass $\hat{Q}$ und $\hat{P}$ die Vertauschungsregeln $[\hat{Q}, \hat{P}] = i\hbar$ erfüllen. Drücken Sie $\hat{H}_\perp$ durch $\hat{Q}$ und $\hat{P}$ aus und bestimmen Sie die Eigenwerte von $\hat{H}_\perp$. Was sind die Energieeigenwerte von $\hat{H}$ (*Landau Niveaus*)?