Hinweis: Bitte laden Sie Ihre Übungsabgabe im Olat-Kurs unter „Übungsaufgaben“ hoch. Nur die mit einem ☗ gekennzeichneten Aufgaben müssen eingereicht werden.

☗ **Aufgabe 28.** *Phasenoperator 1* (6 Punkte)
Die Ortsdarstellung des Drehimpulsoperators in z-Richtung

$$\hat{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} \tag{1}$$

legt die Einführung eines komplementären ”*Phasenoperators*”

$$\hat{\phi} = \varphi \tag{2}$$

nahe.

(a) Was ist die Vertauschungsregel $\left[\hat{\phi}, \hat{L}_z\right]$ und welche Unschärferelation impliziert sie?

(b) Man betrachte einen Eigenzustand $Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \in \mathcal{L}^2(S^2, \mathrm{d}\Omega)$ von $\hat{L}_z$ und berechne $\langle \Delta\hat{\phi}^2 \rangle$. Man zeige damit die Inkonsistenz der Einführung des Phasenoperators (2).

Aufgabe 29. *Phasenoperator 2*
Die Inkonsistenz des in Aufgabe 28 definierten Phasenoperators liegt daran, dass seine Anwendung auf Zustände aus $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(S^2, \mathrm{d}\Omega)$ zu nicht periodischen Funktionen führt und damit aus $\mathcal{H}$ herausführt. Man kann dies beheben, indem man Operatoren mit der Ortsdarstellung

$$\widehat{\sin\phi} = \sin\varphi \qquad\qquad \widehat{\cos\phi} = \cos\varphi \tag{3}$$

einführt.

(a) Man zeige, dass gilt:

$$\left[\widehat{\sin\phi}, \hat{L}_z\right] = i\hbar\,\widehat{\cos\phi} \tag{4}$$

$$\left[\widehat{\cos\phi}, \hat{L}_z\right] = -i\hbar\,\widehat{\sin\phi} \tag{5}$$

(b) Wie lauten die entsprechenden Unschärferelationen?

Aufgabe 30. *Zeitabhängiger Hamiltonoperator: exakte Lösung* (6 Punkte)
Betrachten Sie den angetriebenen harmonischen Oszillator mit dem Hamiltonoperator

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \frac{\hat{p}^2}{2m} + \tfrac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 - F\hat{x}\cos(\Omega t) &(6)\\ &= \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \tfrac{1}{2}\right) - \hbar A\left(\hat{a}^\dagger + \hat{a}\right)\cos(\Omega t) \quad \text{mit } A = \frac{F}{\sqrt{2m\hbar\Omega}}. &(7)\end{aligned}$$

Die Energieeigenzustände des harmonischen Oszillators (mit $F = 0$) sind $|n\rangle$ für $n = 0, 1, 2, ...$ und

$$\hat{a}\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle\,, \quad \hat{a}^\dagger\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle\,. \tag{8}$$

Zeigen Sie, dass der Zustand

$$|\psi_0(t)\rangle = e^{-i\theta(t)}\, e^{-\frac{1}{2}|\alpha(t)|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(t)^n}{\sqrt{n!}}\,|n\rangle \tag{9}$$

eine Lösung der Zeitabhängigen Schrödingergleichung ist, falls $\theta(t)$ und $\alpha(t)$ folgende Bedingungen erfüllen

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}(t) &= -i\omega\alpha(t) + iA\cos(\Omega t) &(10)\\ \dot{\theta}(t) &= \frac{\omega}{2} - \frac{A}{2}\Big(\alpha(t) + \alpha(t)^*\Big)\cos(\Omega t)\,. &(11)\end{aligned}$$

Aufgabe 31. *Runge-Lenz Vektor* (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass der Runge-Lenz Vektor

$$\hat{\vec{F}} = \frac{1}{2m}\left(\hat{\vec{p}} \times \hat{\vec{L}} - \hat{\vec{L}} \times \hat{\vec{p}}\right) - \frac{\alpha}{\hat{r}}\hat{\vec{r}} \tag{12}$$

mit dem Hamiltonoperator $\hat{H} = \hat{\vec{p}}^{\,2}/2m - \alpha/r$ des Coulomb Potentials kommutiert.