

Hinweis: Bitte laden Sie Ihre Übungsabgabe im Olat-Kurs unter „Übungsaufgaben“ hoch. Nur die mit einem ♣ gekennzeichneten Aufgaben müssen eingereicht werden.

♣ **Aufgabe 21.** *Drehimpuls-Leiteroperatoren 1* (8 Punkte)

In kartesischen Koordinaten gilt:

$$\hat{L}^2 = \frac{1}{2} \left(\hat{L}_+ \hat{L}_- + \hat{L}_- \hat{L}_+ \right) + \hat{L}_z^2, \quad (1)$$

wobei die $\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$ die Leiteroperatoren des Bahndrehimpulses bedeuten.

- (a) Leiten Sie mit Hilfe der Darstellung der Drehimpulsoperatoren $\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z$ in sphärischen Polarkoordinaten die Polarkoordinatendarstellung der Leiteroperatoren her.
- (b) Leiten Sie mit Hilfe von (1) die Darstellung von \hat{L}^2 in sphärischen Polarkoordinaten her und zeigen Sie damit, dass sich der 3-dimensionale Laplaceoperator in Kugelkoordinaten durch \hat{L}^2 ausdrücken lässt:

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\hat{L}^2}{\hbar^2 r^2} \quad (2)$$

♣ **Aufgabe 22.** *Drehimpuls-Leiteroperatoren 2* (6 Punkte)

Die Matrizen

$$\hat{L}_x \equiv \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \hat{L}_y \equiv \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \hat{L}_z = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

stellen die räumlichen Komponenten des Drehimpulses für $l = 1$ in der Basis der Eigenzustände $|m = -1\rangle, |m = 0\rangle, |m = 1\rangle$ von \hat{L}_z dar.

- (a) Zeigen Sie, dass der Eigenwert von \hat{L}^2 , $\hbar^2 l(l+1)$ mit $l = 1$ ist.
- (b) Bestimmen Sie die Eigenvektoren von \hat{L}_x, \hat{L}_y und \hat{L}_z jeweils zum Eigenwert $m = 0$. Zeigen Sie, dass dieser Satz von Vektoren eine orthogonale, vollständige Basis bildet.

♣ **Aufgabe 23.** *Spin 1* (6 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die sogenannten Spinmatritzen

$$\hat{s}_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{s}_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \hat{s}_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

den Vertauschungsregeln $[\hat{s}_i, \hat{s}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{s}_k$ und $[\hat{s}_i, \hat{s}^2] = 0$ des Drehimpulses genügen. Was ist \hat{s}^2 und welche Eigenwerte hat dieser Operator?

(b) Die Eigenzustände (Eigenspinoren) von \hat{s}_z sind

$$\Psi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Psi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Welche Linearkombinationen von Ψ_{\pm} sind Eigenspinoren von \hat{s}_x und \hat{s}_y ?

Aufgabe 24. *Spin 2*

Die allgemeine Spin-Komponente eines Spin-1/2 Systems ist $\hat{s}_{\vec{n}} := \frac{1}{2}\vec{n}\hat{\sigma}$, wobei $\vec{n} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$ der allgemeine Einheitsvektor ist. Bestimmen Sie die Eigenwerte von $\hat{s}_{\vec{n}}$ und einen vollständigen Satz orthonormierter Eigenzustände. Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle\hat{\sigma}_z\rangle$ in diesen Eigenzuständen.