

Hinweis: Bitte laden Sie Ihre Übungsabgabe im Olat-Kurs unter „Übungsaufgaben“ hoch. Nur die mit einem **►** gekennzeichneten Aufgaben müssen eingereicht werden.

► Aufgabe 18. Halber Harmonischer Oszillator (6 Punkte)

Betrachten Sie zunächst einen harmonischen Oszillator in einer Dimension mit Frequenz ω und Masse m . Die zugehörigen Energieigenwerte und Funktionen sind E_n und $\phi_n(x)$. Nun werde eine unendlich hohe Potentialstufe bei $x = 0$ hinzugenommen, sodass

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{für } x \leq 0 \\ \frac{m\omega^2}{2}x^2 & \text{für } x > 0. \end{cases} \quad (1)$$

- (a) Begründen Sie, dass die Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators mit Potentialbarriere bis auf einen Normierungsfaktor eine Untermenge der Eigenfunktionen ϕ_n des harmonischen Oszillators sind. Was sind die zugehörigen Eigenenergien?
- (b) Sei $\Psi_0(x)$ eine beliebige Wellenfunktion im Potential $V(x)$ zur Zeit $t = 0$. Zeigen Sie, dass zur Zeit $t = T$ die Wellenfunktion in ihr Negatives übergeht, d.h., dass gilt

$$\Psi(x, T) = -\Psi(x, 0) = -\Psi_0(x). \quad (2)$$

T ist hierbei die Schwingdauer des Oszillators, d.h. $\omega T = 2\pi$. Was passiert bei $t = 2T$?

► Aufgabe 19. Summenregel (8 Punkte)

Betrachten Sie ein Teilchen in einem eindimensionalen Potential $V(x)$ welches nur gebundene Zustände $|E_n\rangle$ zu den Eignwerten E_n des Hamiltonoperators

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) \quad (3)$$

besitzt, d.h.

$$\hat{H} |E_n\rangle = E_n |E_n\rangle. \quad (4)$$

- (a) Zeigen Sie

$$\left[[\hat{x}, \hat{H}], \hat{x} \right] = \frac{\hbar^2}{m}. \quad (5)$$

- (b) Beweisen Sie mit (a) durch geschicktes Einfügen eines Einheitsoperators $\mathbb{1} = \sum_k |E_k\rangle \langle E_k|$ die Summenregel des Dipolmatrixelementes $\hat{d} = e\hat{x}$

$$\sum_k \omega_{kn} |\langle E_n | \hat{d} | E_k \rangle|^2 = \sum_k \omega_{kn} \langle E_n | \hat{d} | E_k \rangle \langle E_k | \hat{d} | E_n \rangle = \frac{\hbar e^2}{2m}, \quad (6)$$

wobei $\hbar\omega_{kn} = E_k - E_n$.

- (c) Prüfen Sie die Summenregel explizit für den 1-dimenionalen harmonischen Oszillator

► **Aufgabe 20.** *Virialsatz* (6 Punkte)

Gegeben sei der Hamiltonoperator in einer Dimension

$$\hat{H} = \hat{H}_{\text{kin}} + \hat{H}_{\text{pot}} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}). \quad (7)$$

(a) Zeigen Sie, dass in Ortsdarstellung gilt:

$$\frac{1}{i\hbar} [\hat{H}, \hat{x}\hat{p}] = \hat{x} \left(\frac{dV}{dx} \right) - \frac{1}{m} \hat{p}^2. \quad (8)$$

(b) Sein nun φ_E ein Eigenzustand von \hat{H} zur Energie E . Folgern Sie aus (8), dass

$$\left\langle \frac{\hat{p}^2}{2m} \right\rangle_E = \frac{1}{2} \left\langle \hat{x} \frac{d}{dx} V(x) \right\rangle_E \quad (9)$$

gilt, wobei $\langle \bullet \rangle_E$ den Erwartungswert im Zustand φ_E bezeichnet.

(c) Nun sei speziell

$$V(\lambda x) = \lambda^n V(x), \quad (10)$$

d.h. $V(x)$ ist eine homogene Funktion vom Grad n . Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\left\langle \hat{H}_{\text{kin}} \right\rangle_E = \frac{n}{2} \left\langle \hat{H}_{\text{pot}} \right\rangle_E \quad (\text{Virialsatz}). \quad (11)$$

Hinweis: Differentiation von (10) nach λ .