Hinweis: Bitte laden Sie Ihre Übungsabgabe im Olat-Kurs unter „Übungsaufgaben“ hoch. Nur die mit einem ☗ gekennzeichneten Aufgaben müssen eingereicht werden.

☗ **Aufgabe 15.** *Gekoppelte Oszillatoren; Normalkoordinaten* (10 Punkte)

In der Vorlesung wurden die Eigenwerte des harmonischen Oszillators hergeleitet. Gegeben seien nun zwei gekoppelte harmonische Oszillatoren mit

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\left(\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2\right) + \gamma m\omega^2 \hat{x}_1\hat{x}_2, \tag{1}$$

wobei $0 < \gamma < 1$ den Kopplungsgrad charakterisiert.

(a) Wie lauten die Energieeigenwerte für verschwindende Kopplung ($\gamma = 0$)? Welchen Entartungsgrad besitzen die zugehörigen Eigenfunktionen, d.h. wieviel verschiedene Eigenfunktionen gibt es zu jedem Eigenwert?

(b) Führen Sie die durch $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \eta)$ und $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - \eta)$ definierten neuen Variablen ξ und η ein. Wie lautet der Hamiltonoperator in diesen neuen Koordinaten und den zugehörigen Impulsen?

(c) Berechnen Sie die Eigenwerte für $\gamma \neq 0$. Zeigen Sie, dass der Kopplungsterm i.Allg. die in (a) gefundene Entartung aufhebt.

Aufgabe 16. *Hermitesche Polynome*

(a) Beweisen Sie, dass $e^{2\lambda\xi-\lambda^2}$ erzeugende Funktion der Hermiteschen Polynome ist (Gl. (215) im Skript), d. h., dass gilt:

$$e^{2\lambda\xi-\lambda^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} H_n(\xi). \tag{2}$$

Hinweis: $e^{2\lambda\xi-\lambda^2} = e^{\xi^2} e^{-(\lambda-\xi)^2}$

(b) Zeigen Sie damit die Symmetrieeigenschaft $H_n(-\xi) = (-1)^n H_n(\xi)$ und weiterhin, dass die Hermiteschen Polynome folgende Gleichungen erfüllen:

$$H_n'(\xi) = 2nH_{n-1}(\xi), \tag{3}$$

$$2\xi H_n(\xi) = 2nH_{n-1}(\xi) + H_{n+1}(\xi). \tag{4}$$

Hinweis: Differenzieren Sie Gl. (2) nach ξ bzw. λ und vergleichen Sie die Koeffizienten von λ^n.

Aufgabe 17. *Kohärente Zustände* (8 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die kohärenten Zustände normiert sind, d.h. $\langle\alpha|\alpha\rangle = 1$, jedoch nicht orthogonal. Was ist $\langle\alpha|\beta\rangle$?

(b) Zeigen Sie mit Hilfe des Baker-Hausdorff Theorems, dass für einen kohärenten Zustand gilt:

$$|\alpha\rangle = \exp\left(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}\right)|0\rangle\,, \tag{5}$$

wobei $|0\rangle$ der Eigenzustand von $\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ zum Eigenwert 0 bedeutet.

(c) Zeigen Sie, dass die kohärenten Zustände übervollständig sind, d.h.

$$\frac{1}{\pi}\int \mathrm{d}^2\alpha\ |\alpha\rangle\langle\alpha| = \mathbb{1}, \tag{6}$$

wobei $\int \mathrm{d}^2\alpha = \int \mathrm{d}u \int \mathrm{d}v = \int_0^\infty \mathrm{d}r\ r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi$ mit $\alpha = u + iv = re^{i\varphi}$.
Hinweis: Verwenden Sie $\int_0^\infty \mathrm{d}x\ x^n e^{-x} = n!$.