Hinweis: Bitte laden Sie Ihre Übungsabgabe im Olat-Kurs unter „Übungsaufgaben“ hoch. Nur die mit einem ☗ gekennzeichneten Aufgaben müssen eingereicht werden.

☗ **Aufgabe 12.** *Streuung an Kastenbarriere (10 Punkte)*
Ein Teilchen der Masse m bewege sich entlang der x-Achse im Potential

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } |x| > a \\ V_0 & \text{für } |x| \leq a. \end{cases},$$

wobei $V_0 > 0$ sei. Für ein Teilchen, das sich von $x = -\infty$ mit vorgegebener Energie $E > 0$ auf die Barriere zubewegt, hat die stationäre Wellenfunktion die Form

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + re^{-ikx} & \text{für } x < -a \\ \beta_+ e^{Kx} + \beta_- e^{-Kx} & \text{für } -a \leq x \leq a \,, \\ te^{ikx} & \text{für } x > a. \end{cases}$$

Hinweis: Je nach Energie ist K reell oder imaginär mit $K = i\,k'$.

(a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsstromdichte des einfallenden, des reflektierten und des transmittierten Teils der Wellenfunktion.

(b) Wie groß sind Reflektions- und Transmissionsvermögen für $0 < E < V_0$ sowie für $E > V_0$

$$R := \left|\frac{j_{\text{refl}}}{j_0}\right|, \quad T := \left|\frac{j_{\text{trans}}}{j_0}\right| \quad ?$$

(c) Wie groß ist T für $E = V_0$?

☗ **Aufgabe 13.** *Baker-Hausdorff-Theorem (8 Punkte)*

(a) Man zeige, dass für beliebige Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ und komplexe Zahlen x gilt:

$$e^{x\hat{A}}\hat{B}e^{-x\hat{A}} = \hat{B} + \left[\hat{A},\hat{B}\right]x + \frac{1}{2!}\left[\hat{A},\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right]x^2 + \ldots. \tag{1}$$

Hinweis: Man betrachte die Taylorreihenentwicklung der Funktion $\hat{f}(x) = e^{x\hat{A}}\hat{B}e^{-x\hat{A}}$

(b) Unter Verwendung von Gleichung (1) beweise man das Baker-Hausdorff-Theorem

$$e^{\hat{A}}e^{\hat{B}} = e^{\hat{A}+\hat{B}+\frac{1}{2}\left[\hat{A},\hat{B}\right]} = e^{\hat{A}+\hat{B}}e^{\frac{1}{2}\left[\hat{A},\hat{B}\right]}, \tag{2}$$

falls $\left[\hat{A},\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right] = \left[\hat{B},\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right] = 0.$

Hinweis: Man betrachte die Funktion $\hat{f}(x) = e^{x\hat{A}}e^{x\hat{B}}$ und finde für diese eine Differentialgleichung erster Ordnung durch Ableiten von $\hat{f}$ und der Verwendung von $e^{-x\hat{A}}e^{x\hat{A}} = \mathbb{1}$.

Aufgabe 14. *Doppel-Delta-Potential*
Es werden zwei identische attraktive Delta Potentiale im Abstand d voneinander betrachtet:

$$V(x) = -F\left(\delta(x-\frac{d}{2}) + \delta(x+\frac{d}{2})\right),$$

wobei $F > 0$ sei. Lösen Sie die stationäre Schrödingergleichung in den drei Teilgebieten $-\infty < x \leq -d/2$, $-d/2 \leq x \leq d/2$, $d/2 \leq x < \infty$. Finden Sie die gebundenen Zustände und die dazugehörigen Energien.