

Hinweis: Bitte laden Sie Ihre Übungsabgabe im Olat-Kurs unter „Übungsaufgaben“ hoch. Nur die mit einem ♣ gekennzeichneten Aufgaben müssen eingereicht werden.

♣ **Aufgabe 9. Freier Fall** (8 Punkte)

Die eindimensionale Schrödingergleichung bei Vorhandensein einer konstanten Kraft $F = -mg$ (freier Fall) lautet:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + mgx \right] \psi(x, t). \quad (1)$$

- (a) Leiten Sie aus der obigen Gleichung eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung für die Wellenfunktion im k -Raum $\tilde{\psi}(k, t)$ ab.
- (b) Zeigen Sie, dass diese partielle Differentialgleichung für die Wellenfunktion im k -Raum mit der Substitution $k = k_0 + \frac{mg}{\hbar}t$ in die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\psi}(k_0 + \frac{mg}{\hbar}t, t) = -i \frac{\hbar}{2m} (k_0 + \frac{mg}{\hbar}t)^2 \tilde{\psi}(k_0 + \frac{mg}{\hbar}t, t) \quad (2)$$

übergeht.

- (c) Berechnen Sie $\tilde{\psi}(k, t)$ und zeigen Sie, dass der mittlere Impuls $\langle \hat{p} \rangle = \hbar \langle k \rangle$ des Teilchens eine lineare Funktion der Zeit t ist.

Aufgabe 10. Unendliches Kastenpotential

Gegeben sei ein eindimensionales Kastenpotential mit unendlich hohen Wänden. D.h.

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x \leq L \\ +\infty & \text{sonst.} \end{cases} \quad (3)$$

Die stationären Wellenfunktionen $\phi_n(x)$ und die zugehörigen Energieeigenwerte E_n sind in der Vorlesung berechnet worden.

- (a) Zeigen Sie, dass die allgemeine zeitabhängige Lösung der Schrödingergleichung mit der Anfangsbedingung $\psi(x, 0) = \psi_0(x)$ in der Form

$$\psi(x, t) = \sum_n \alpha_n \phi_n(x) e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} \quad (4)$$

geschrieben werden kann. Wodurch sind die α_n bestimmt?

- (b) Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei die Wellenfunktion $\psi(x, t = 0) = \psi_0(x)$. Die Periode der Grundschwingung sei T . Zeigen Sie, dass nach einer Zeit von $t = T/2$ die Funktion in ihr Spiegelbild bezüglich $x = L/2$ übergeht, d.h. dass gilt $\psi(x, T/2) = -\psi(L - x, 0) = -\psi_0(L - x)$. Was passiert nach Vielfachen von T ?

■ **Aufgabe 11. Freier Fall II (8 Punkte)**

Es werde erneut das Problem aus Aufgabe 9 betrachtet.

- (a)** Man zeige, dass die stationäre Wellenfunktion zur Energie E gegeben ist durch

$$\phi_E(x) = \mathcal{N} \text{Ai} \left(\frac{x}{l_0} - \frac{E}{\epsilon_0} \right). \quad (5)$$

Hierbei ist \mathcal{N} eine Normierungskonstante und $l_0 = (\hbar^2/2m^2g)^{1/3}$ und $\epsilon_0 = (\hbar^2mg^2/2)^{1/3}$ sind die Standardlänge und -Energie.

$$\text{Ai}(x) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \exp \left(i \left(yx + \frac{1}{3}y^3 \right) \right) \quad (6)$$

ist die Airysche Funktion. Zeigen Sie erst, dass diese der Differentialgleichung

$$\text{Ai}''(x) - x \text{Ai}(x) = 0 \quad (7)$$

genügt. Ihre kleinsten Nullstellen sind $-2.3381 \dots$, $-4.0879 \dots$, $-5.52055 \dots$.

- (b)** Nun falle das Teilchen auf eine harte Oberfläche bei $x = 0$, d.h. das Potential sei

$$V(x) = \begin{cases} mgx & \text{für } x > 0 \\ +\infty & \text{für } x \leq 0. \end{cases} \quad (8)$$

Was muss für $\phi(x)$ für $x \leq 0$ gelten? Was folgt daraus für die erlaubten Energiewerte, wenn man für $x > 0$ den obigen Ansatz für die Wellenfunktion verwendet?