

Hinweis: Bitte laden Sie Ihre Übungsabgabe im Olat-Kurs unter „Übungsaufgaben“ hoch. Nur die mit einem  gekennzeichneten Aufgaben müssen eingereicht werden.

 Aufgabe 5. *Ableitung einer operatorwertigen Funktion (8 Punkte)*

Die Ableitung einer stetigen, operatorwertigen Funktion $A(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, ist durch

$$\frac{dA(\lambda)}{d\lambda} := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{A(\lambda + \epsilon) - A(\lambda)}{\epsilon} \quad (1)$$

definiert (vorausgesetzt, dass der Grenzwert existiert). Zeigen Sie:

(a)

$$\frac{d}{d\lambda}(AB) = \frac{dA}{d\lambda}B + A\frac{dB}{d\lambda}; \quad (2)$$

(b) *

$$\frac{d}{d\lambda}A^{-1} = -A^{-1}\frac{dA}{d\lambda}A^{-1}; \quad (3)$$

(c)

$$\frac{d}{d\lambda}e^{\lambda C} = Ce^{\lambda C}, \quad \text{falls } C \neq C(\lambda); \quad (4)$$

(d)

$$\frac{d}{d\lambda}A^n = \sum_{l=1}^n A^{l-1}\frac{dA}{d\lambda}A^{n-l}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (5)$$

Berechnen Sie speziell für $A \neq A(\lambda)$, $B \neq B(\lambda)$ die Ableitungen

$$(e) \quad \frac{d}{d\lambda}(e^{\lambda B}Ae^{-\lambda B}) \quad \text{und} \quad (f) \quad \frac{d}{d\lambda}(e^{\lambda A}e^{\lambda B}). \quad (6)$$

*(Anleitung zu (b) : Benutzen Sie $A^{-1}A = \mathbb{1}$ und die Produktregel von (a).)

 Aufgabe 6. *Matrixexponentiale (6 Punkte)*

Gegeben sei die selbstadjungierte Matrix

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Berechnen Sie die matrixwertige Funktion

$$\hat{T}(\alpha) := e^{i\alpha\hat{A}}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (8)$$

(a) mithilfe der Matrix-Exponentialreihe.

(b) mithilfe der Spektraldarstellung.

■ **Aufgabe 7. Unschärferelation (6 Punkte)**

- (a) Es sei $[\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}$ und $[\hat{A}, \hat{C}] = \hat{B}$. Zeigen Sie, dass

$$\Delta(\hat{A}\hat{B})\Delta\hat{C} \geq \frac{1}{2}\langle\hat{A}^2 + \hat{B}^2\rangle \quad (9)$$

gilt.

- (b) In einer räumlichen Dimension gilt:

$$\langle\Delta\hat{r}_\alpha^2\rangle\langle\Delta\hat{p}_\alpha^2\rangle \geq \frac{\hbar^2}{4}, \quad (10)$$

wobei $\alpha = x, y, z$ ist. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\langle\Delta\hat{r}^2\rangle\langle\Delta\hat{p}^2\rangle \geq \frac{9\hbar^2}{4}. \quad (11)$$

Nehmen Sie zur Vereinfachung an, dass $\langle\hat{r}_\alpha\rangle = \langle\hat{p}_\alpha\rangle = 0$ ist und verwenden Sie die Ungleichung

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \quad \text{für } a, b > 0. \quad (12)$$

Aufgabe 8. Kommutatoren

- (a) Seien $\hat{A}$, $\hat{B}$ und $\hat{C}$ unterschiedliche Operatoren. Zeigen Sie:

- (i) $[\hat{A} + \hat{B}, \hat{C}] = [\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{B}, \hat{C}]$,
- (ii) $[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}$.

- (b) Seien $\hat{A}$, $\hat{B}$ hermitesche Operatoren. Zeigen Sie, dass $\hat{A}\hat{B}$ hermitesch ist, wenn $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$.

- (c) Seien $\hat{A}$, $\hat{B}$ zwei kommutierende Operatoren. Sei $|a\rangle$ Eigenzustand von $\hat{A}$ zum Eigenwert a . Zeigen Sie, dass $\hat{B}|a\rangle$ ebenfalls Eigenzustand von $\hat{A}$ ist. Wie lautet der zugehörige Eigenwert?