

” Wer von der Quantentheorie nicht schockiert ist, hat sie nicht verstanden.“ – Niels Bohr

Aufgabe 1. Operatoren

Gegeben seien die folgenden Operatoren:

- (i) $\hat{D} = \frac{\partial}{\partial x}$ mit $\hat{D}\psi(x) = \frac{\partial\psi(x)}{\partial x}$
- (ii) $\hat{1}$ mit $\hat{1}\psi(x) = \psi(x)$
- (iii) \hat{F} mit $\hat{F}\psi(x) = f(x)\psi(x)$
- (iv) \hat{P} mit $\hat{P}\psi(x) = \psi(x)^3 + 3\psi(x)^2 - 4$
- (v) \hat{Q} mit $\hat{Q}\psi(x) = \int_0^1 dx \psi(x)$.

- (a) Welche dieser Operatoren sind linear?
- (b) Konstruieren Sie für A die inversen \hat{A}^{-1} mit $\hat{A} = \hat{D}, \hat{1}, \hat{F}$, falls diese existieren.
- (c) Zeigen Sie, dass $i\hat{D}$ hermitesch ist.

Aufgabe 2. Adjungierter Operator

Zeigen Sie

- (a) $(\hat{A}\hat{B})^\dagger = \hat{B}^\dagger\hat{A}^\dagger$
- (b) $(\hat{A}^\dagger)^\dagger = \hat{A}$
- (c) Wenn ein Operator \hat{B} einen Eigenwert b hat mit $b \neq b^*$, dann ist $\hat{B} \neq \hat{B}^\dagger$.

Der *Kommutator* zweier Operatoren \hat{A}, \hat{B} ist definiert als

$$[\hat{A}, \hat{B}] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}. \quad (1)$$

- (d) Zeigen Sie: Falls $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$ und $\hat{B} = \hat{B}^\dagger$, dann gilt

$$[\hat{A}, \hat{B}]^\dagger = -[\hat{A}, \hat{B}] \quad (2)$$

Aufgabe 3. Komplexe Konjugation

Betrachten Sie einen Operator \hat{C} mit folgender Eigenschaft

$$\hat{C}\psi(x) = \psi(x)^* \quad (3)$$

- (a) Ist \hat{C} hermitesch?
- (b) Was sind die Eigenfunktionen von \hat{C} ?
- (c) Was sind die Eigenwerte von \hat{C} ?

Aufgabe 4. Skalarprodukte und Erwartungswerte

- (a)** Zeigen Sie, dass das Skalarprodukt zweier Vektoren $|f\rangle, |g\rangle$ in Ortsdarstellung bzw. Impulsdarstellung lautet

$$\int dx f^*(x)g(x) \quad \text{bzw.} \quad \int dk \tilde{f}^*(k)\tilde{g}(k). \quad (4)$$

- (b)** Zeigen Sie, dass aus $\langle f|f\rangle = 1$ folgt

$$\int dx |f(x)|^2 = 1 \quad \text{bzw.} \quad \int dk |\tilde{f}(k)|^2 = 1. \quad (5)$$

- (c)** Betrachten Sie eine Gaußsche Wellenfunktion

$$\Psi(x) = \mathcal{N}e^{-x^2/d^2}. \quad (6)$$

Wie lautet der Normierungsfaktor \mathcal{N} ? Was sind die Erwartungswerte

$$(i) \quad \langle \hat{x} \rangle = \langle \Psi | \hat{x} | \Psi \rangle \quad (7)$$

$$(ii) \quad \langle \hat{x}^2 \rangle = \langle \Psi | \hat{x}^2 | \Psi \rangle \quad (8)$$

$$(iii) \quad \langle \hat{p} \rangle = \langle \Psi | \hat{p} | \Psi \rangle \quad (9)$$

$$(iv) \quad \langle \hat{p}^2 \rangle = \langle \Psi | \hat{p}^2 | \Psi \rangle, \quad (10)$$

wobei $\hat{p} = -i\hbar\partial_x$ ist?