

”Wer von der Quantentheorie nicht schockiert ist, hat sie nicht verstanden.“ – Niels Bohr

**Aufgabe 1. Operatoren**

Gegeben seien die folgenden Operatoren:

- (i)  $\hat{D} = \frac{\partial}{\partial x}$  mit  $\hat{D}\psi(x) = \frac{\partial\psi(x)}{\partial x}$
- (ii)  $\hat{1}$  mit  $\hat{1}\psi(x) = \psi(x)$
- (iii)  $\hat{F}$  mit  $\hat{F}\psi(x) = f(x)\psi(x)$
- (iv)  $\hat{P}$  mit  $\hat{P}\psi(x) = \psi(x)^3 + 3\psi(x)^2 - 4$
- (v)  $\hat{Q}$  mit  $\hat{Q}\psi(x) = \int_0^1 dx\psi(x).$

- (a) Welche dieser Operatoren sind linear?
- (b) Konstruieren Sie für  $A$  die inversen  $\hat{A}^{-1}$  mit  $\hat{A} = \hat{D}, \hat{1}, \hat{F}$ , falls diese existieren.
- (c) Zeigen Sie, dass  $i\hat{D}$  hermitesch ist.

**Aufgabe 2. Adjungierter Operator**

Zeigen Sie

- (a)  $(\hat{A}\hat{B})^\dagger = \hat{B}^\dagger\hat{A}^\dagger$
- (b)  $(\hat{A}^\dagger)^\dagger = \hat{A}$
- (c) Wenn ein Operator  $\hat{B}$  einen Eigenwert  $b$  hat mit  $b \neq b^*$ , dann ist  $\hat{B} \neq \hat{B}^\dagger$ .

Der *Kommutator* zweier Operatoren  $\hat{A}, \hat{B}$  ist definiert als

$$[\hat{A}, \hat{B}] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}. \quad (1)$$

- (d) Zeigen Sie: Falls  $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$  und  $\hat{B} = \hat{B}^\dagger$ , dann gilt

$$[\hat{A}, \hat{B}]^\dagger = - [\hat{A}, \hat{B}] \quad (2)$$

**Aufgabe 3. Komplexe Konjugation**

Betrachten Sie einen Operator  $\hat{C}$  mit folgender Eigenschaft

$$\hat{C}\psi(x) = \psi(x)^* \quad (3)$$

- (a) Ist  $\hat{C}$  hermitesch?
- (b) Was sind die Eigenfunktionen von  $\hat{C}$ ?
- (c) Was sind die Eigenwerte von  $\hat{C}$ ?

**Aufgabe 4.** Skalarprodukte und Erwartungswerte

- (a) Zeigen Sie, dass das Skalarprodukt zweier Vektoren  $|f\rangle, |g\rangle$  in Ortsdarstellung bzw. Impulsdarstellung lautet

$$\int dx f^*(x)g(x) \quad \text{bzw.} \quad \int dk \tilde{f}^*(k)\tilde{g}(k). \quad (4)$$

- (b) Zeigen Sie, dass aus  $\langle f|f\rangle = 1$  folgt

$$\int dx |f(x)|^2 = 1 \quad \text{bzw.} \quad \int dk |\tilde{f}(k)|^2 = 1. \quad (5)$$

- (c) Betrachten Sie eine Gaußsche Wellenfunktion

$$\Psi(x) = \mathcal{N} e^{-x^2/d^2}. \quad (6)$$

Wie lautet der Normierungsfaktor  $\mathcal{N}$ ? Was sind die Erwartungswerte

$$(i) \quad \langle \hat{x} \rangle = \langle \Psi | \hat{x} | \Psi \rangle \quad (7)$$

$$(ii) \quad \langle \hat{x}^2 \rangle = \langle \Psi | \hat{x}^2 | \Psi \rangle \quad (8)$$

$$(iii) \quad \langle \hat{p} \rangle = \langle \Psi | \hat{p} | \Psi \rangle \quad (9)$$

$$(iv) \quad \langle \hat{p}^2 \rangle = \langle \Psi | \hat{p}^2 | \Psi \rangle, \quad (10)$$

wobei  $\hat{p} = -i\hbar\partial_x$  ist?