Hinweis: Bitte laden Sie Ihre Übungsabgabe im Olat-Kurs unter „Übungsaufgaben" hoch. Nur die mit einem ☗ gekennzeichneten Aufgaben müssen eingereicht werden.

☗ **Aufgabe 32.** *Kinetischer Impuls* (4 Punkte)
Im Gegensatz zum kanonischen Impuls $\hat{\vec{p}}$ ist der kinetische Impuls $m\hat{\vec{v}} = \hat{\vec{p}} - \frac{q}{c}\vec{A}$ eines geladenen Teilchens in einem äußeren elektromagnetischen Feld invariant unter Eichtransformationen. Zeigen Sie, dass für $\hat{\vec{v}}$ folgende Vertauschungsregeln gelten:

$$[\hat{x}_i, m\hat{v}_j] = i\hbar\delta_{ij} \tag{1}$$

$$[m\hat{v}_i, m\hat{v}_j] = i\hbar\frac{q}{c}\epsilon_{ijk}B_k, \tag{2}$$

wobei $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$.

Aufgabe 33. *Landau Niveaus - alternativer Zugang*
Es sei $\vec{B} = (0, 0, B)$ ein konstantes, homogenes Magnetfeld in z-Richtung. Das elektrische Feld und das skalare Potential seien gleich Null, so dass das Vektorpotential $\vec{A}$ nur eine Funktion des Ortes ist. Zeigen Sie, dass dann der Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left(\hat{\vec{p}} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2 = \hat{H}_\perp + \hat{H}_\parallel \tag{3}$$

sich in einen transversalen und longitudinalen Teil aufspalten lässt mit

$$\hat{H}_\perp = \frac{m}{2}\left(\hat{v}_x^2 + \hat{v}_y^2\right), \qquad \hat{H}_\parallel = \frac{m}{2}\hat{v}_z^2. \tag{4}$$

Zeigen Sie, dass die beiden Teile kommutieren, d.h. $[\hat{H}_\perp, \hat{H}_\parallel] = 0$. Definieren Sie die Operatoren

$$\hat{Q} = \frac{\sqrt{m/M}}{\omega_c}\hat{v}_x, \qquad \hat{P} = \sqrt{mM}\hat{v}_y, \tag{5}$$

wobei $\omega_c = qB/mc$ die Zyklotronfrequenz ist. Zeigen Sie, dass $\hat{Q}$ und $\hat{P}$ die Vertauschungsregeln $[\hat{Q}, \hat{P}] = i\hbar$ erfüllen. Drücken Sie $\hat{H}_\perp$ durch $\hat{Q}$ und $\hat{P}$ aus und bestimmen Sie die Eigenwerte von $\hat{H}_\perp$. Was sind die Energieeigenwerte von $\hat{H}$ (*Landau Niveaus*)?

Aufgabe 34. *Spinpräzession* (6 Punkte)
Man betrachte ein Spin-1/2 Teilchen in einem äußeren Magnetfeld $\vec{B}(t) = (0, 0, B(t))$. Bei Vernachlässigung der Bewegung des Teilchens lautet der Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \frac{2\mu}{\hbar}\vec{B}(t) \cdot \hat{\vec{S}}. \tag{6}$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei der Zustand des Teilchens gegeben durch den zwei-komponentigen Vektor

$$\chi(0) = \alpha\chi_+ + \beta\chi_-, \tag{7}$$

wobei $\chi_\pm$ die Eigenzustände von $\hat{S}_z$ mit Eigenwerten $\pm\hbar/2$ bedeuten. Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle\hat{S}_x(t)\rangle$, $\langle\hat{S}_y(t)\rangle$ und $\langle\hat{S}_z(t)\rangle$.

Aufgabe 35. *magnetische Resonanz* (8 Punkte)

Man betrachte wiederum ein Spin-1/2 Teilchen in einem äußeren Magnetfeld aus der Aufgabe 34. Es sei nun $B(t) = (-B_\perp \cos(\omega t), B_\perp \sin(\omega t), B_\parallel)$. Der Zustand des Teilchens zur Zeit t kann in der Form

$$\chi(t) = \alpha(t)\chi_+ + \beta(t)\chi_-, \tag{8}$$

geschrieben werden.

(a) Zeigen Sie, dass aus der Schrödingergleichung für $\chi(t)$ mit dem Hamiltonoperator $\hat{H}$ aus Gleichung (6) die Matrixgleichung folgt

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} = -i\begin{pmatrix} \Omega_\parallel & \Omega_\perp e^{i\omega t} \\ \Omega_\perp e^{-i\omega t} & -\Omega_\parallel \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix}, \tag{9}$$

mit $\hbar\Omega_\parallel = \mu B_\parallel$ und $\hbar\Omega_\perp = \mu B_\perp$.

(b) Lösen Sie (9) mit den Anfangsbedingungen $\alpha(0) = 1$,$\beta(0) = 0$.

(c) Unter welcher Bedingung an die Frequenz ω und zu welchen Zeiten gilt $\chi(t) \propto \chi_-$?