"*Wer von der Quantentheorie nicht schockiert ist, hat sie nicht verstanden.*" – Niels Bohr

Aufgabe 1. *Doppelspalt*
Betrachten sie das skizzierte Doppelspaltexperiment. Die Wellenamplitude auf dem Schirm ist

$$\psi_1(y) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{y^2}{2}} e^{i(wt-ay)}, \tag{1}$$

wenn nur einer der Spalte offen ist und

$$\psi_2(y) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{y^2}{2}} e^{i(wt-(a+b)y)}, \tag{2}$$

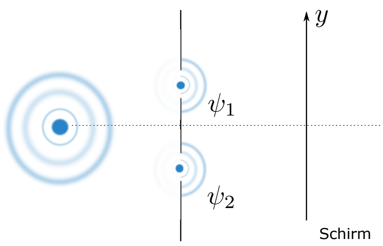
wenn nur der andere Spalt offen ist. Berechnen Sie die Gesamtintensität I auf dem Schirm, wenn:

(a) Intensitäten addiert werden, d.h.

$$I = |\psi_1(y)|^2 + |\psi_2(y)|^2. \tag{3}$$

(b) Wellenamplituden addiert werden, d.h.

$$I = |\psi_1(y) + \psi_2(y)|^2. \tag{4}$$



Aufgabe 2. *Wellenfunktionen*
Die Wellenfunktionen eines Teilchens in einer Dimension seien

(a) $\psi_1 = A_1 e^{-\frac{x^2}{4}}$

(b) $\psi_2 = A_2 x e^{-\frac{x^2}{8}}$

(c) $\psi_3 = A_3 \left(e^{-\frac{x^2}{4}} + x e^{-\frac{x^2}{8}}\right)$

Bestimmen Sie den Betrag von A_1, A_2 und A_3, so dass die Wellenfunktionen normiert sind, d.h.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x |\psi_j|^2 = 1 \tag{5}$$

Bitte wenden!

Aufgabe 3. *Operatoren*
Gegeben seien die folgenden Operatoren:

$$\begin{aligned}
&(i) \quad \hat{D} = \frac{\partial}{\partial x} \text{ with } \hat{D}\psi(x) = \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \\
&(ii) \quad \hat{\mathbb{1}} \text{ with } \hat{\mathbb{1}}\psi(x) = \psi(x) \\
&(iii) \quad \hat{F} \text{ with } \hat{F}\psi(x) = f(x)\psi(x) \\
&(iv) \quad \hat{P} \text{ with } \hat{P}\psi(x) = \psi(x)^3 + 3\psi(x)^2 - 4 \\
&(v) \quad \hat{Q} \text{ with } \hat{Q}\psi(x) = \int_0^1 \mathrm{d}x \psi(x).
\end{aligned}$$

(a) Welche dieser Operatoren sind linear?

(b) Konstruieren Sie für A die inversen $\hat{A}^{-1}$ mit $\hat{A} = \hat{D}, \hat{\mathbb{1}}, \hat{F}$, falls diese existieren.

(c) Zeigen Sie, dass $i\hat{D}$ selbstadjungiert ist.

Aufgabe 4. *Adjungierter Operator*
Zeigen Sie

(a) $\left(\hat{A}\hat{B}\right)^\dagger = \hat{B}^\dagger \hat{A}^\dagger$

(b) $(\hat{A}^\dagger)^\dagger = \hat{A}$

(c) Wenn ein Operator $\hat{B}$ einen Eigenwert b hat mit $b \neq b^*$, dann ist $\hat{B} \neq \hat{B}^\dagger$.

Der *Kommutator* zweier Operatoren $\hat{A}, \hat{B}$ ist definiert als

$$\left[\hat{A}, \hat{B}\right] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}. \tag{6}$$

(d) Zeigen Sie: Falls $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$ und $\hat{B} = \hat{B}^\dagger$, dann gilt

$$\left[\hat{A}, \hat{B}\right]^\dagger = -\left[\hat{A}, \hat{B}\right] \tag{7}$$

Aufgabe 5. *Komplexe Konjugation*
Betrachten Sie einen Operator $\hat{C}$ mit folgender Eigenschaft

$$\hat{C}\psi(x) = \psi(x)^* \tag{8}$$

(a) Ist $\hat{C}$ hermitesch?

(b) Was sind die Eigenfunktionen von $\hat{C}$?

(c) Was sind die Eigenwerte von $\hat{C}$?