

2. Verschränkte Zustände

2.1. Das Gedankenexperiment von Einstein, Podolski und Rosen (1935)

1935 argumentierten Einstein, Podolski und Rosen anhand eines Gedankenexperiments mit zwei Teilchen, daß die Quantenmechanik von Bohr, Sommerfeld und Heisenberg entweder unvollständig ist oder das Prinzip der Lokalität der Theorie aufgegeben werden muß, wenn man am Prinzip der Kausalität festhalten will. EPR betrachteten ein Paar $A+B$ von Teilchen mit Orten x_A und x_B und Impulsen p_A und p_B in einem quantenmechanischen Zustand in dem die Differenz der Orte $\hat{X}_- = \hat{x}_A - \hat{x}_B$ und die Summe der Impulse $\hat{P}_+ = \hat{p}_A + \hat{p}_B$ einen wohldefinierten Wert haben. Man beachte

$$(1) \quad [\hat{X}_-, \hat{P}_+] = [\hat{x}_A - \hat{x}_B, \hat{p}_A + \hat{p}_B] = 0,$$

Im Folgenden wollen wir jedoch die von Bohm 1951 vorgeschlagene Version des EPR Experimentes diskutieren: Dazu betrachten wir ein Paar von Spin $1/2$ Teilchen im Zustand $S=0$.

$$A \xleftarrow[S=0]{\infty} B$$

$$(2) \quad |\Psi\rangle_{\text{EPR}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\downarrow_z\rangle_A |\uparrow_z\rangle_B - |\uparrow_z\rangle_A |\downarrow_z\rangle_B \right)$$

Dieser Zustand ist ein verschränkter Zustand.

Messung von σ_z in A bestimmt σ_z in B sofort und mit 100%iger Sicherheit. Soweit ist das nicht Besonderes. Das hilft für jedes klassisch korrelierte Paar von Teilchen zu.

Es gilt aber auch

$$(3) \quad |\Psi\rangle_{\text{EPR}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\downarrow_x\rangle_A |\uparrow_x\rangle_B - |\uparrow_x\rangle_A |\downarrow_x\rangle_B \right)$$

D.h. Messung von σ_x in A bestimmt σ_x in B sofort und mit 100%iger Sicherheit.

- EPR Paradoxon: Wenn man an der Forderung der Kausalität festhält und annimmt, daß die QM eine lokale Theorie ist, folgt aus dem Gedankenexperiment, daß sowohl σ_x^B als auch σ_z^B Elemente der Realität sind. (Messung von A kann Physik in B nicht beeinflussen wegen des großen Abstandes.)
Q.M. sagt aber

$$[\sigma_x^B, \sigma_z^B] \neq 0 \quad \Downarrow$$

mögliche Auswege:

- (a) EPR: Die Quantentheorie ist nicht vollständig.
Es gibt verborgene Parameter die in der Tat

G_x und G_z von B gleichzeitig festlegen

- (b) Die Quantentheorie ist nicht lokal in dem Sinne, daß Zustände existieren bei denen eine Messung in A instantan die möglichen Resultate einer Messung in einem (entfernten) Paart B beeinflussen

Bellsches Theorem (1964):

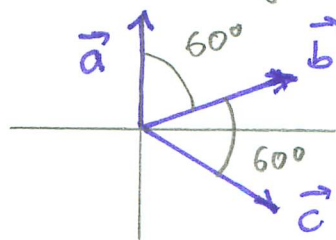
Wenn es lokale versteckte Parameter gibt müssen Korrelationsmessungen an Paaren von Teilchen den sog. Bellschen Ungleichungen genügen. Quantenmechanisch sind jedoch Resultate erlaubt, die diesen Ungleichungen widersprechen.

Korrelation bei Spinnmessung in A in Richtung $\vec{a}$ und in B in Richtung $\vec{b}$ ($\vec{a}, \vec{b}$ Einheitsvektoren)

$$(4) \quad E(\vec{a}, \vec{b}) = \langle \psi | \vec{G}_A \cdot \vec{a} \quad \vec{G}_B \cdot \vec{b} | \psi \rangle$$

(5) Bell: $|E(\vec{a}, \vec{b}) - E(\vec{a}, \vec{c})| \leq 1 + E(\vec{b}, \vec{c})$

betrachten EPR Zustand $|\psi\rangle_{\text{EPR}}$ gemäß Gl. (2):
und 3 Richtungen
in einer Ebene



Der EPR Zustand ist isohop: $\vec{x} \hat{=} \vec{e}_z$

$$E(\vec{x}, \vec{y}) = \langle \psi |_{\text{EPR}} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_A \otimes \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}_B \right) | \psi \rangle_{\text{EPR}}$$

wobei

$$E(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_B - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_B \right] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_A \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}_B$$

$$\cdot \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_B - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_B \right]$$

(6)

$$= \frac{1}{2} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right.$$

(Kreuzterme $\equiv 0$)

$$\left. + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} (-\cos \varphi - \cos \varphi) = -\cos \varphi$$

D.h.

$$E(\vec{a}, \vec{b}) = -\cos(60^\circ) = -\frac{1}{2} = E(\vec{b}, \vec{c})$$

$$E(\vec{a}, \vec{c}) = -\cos(120^\circ) = \frac{1}{2}$$

$$(7) \Rightarrow |E(\vec{a}, \vec{b}) - E(\vec{a}, \vec{c})| = 1 > 1 + E(\vec{b}, \vec{c}) = \frac{1}{2}$$

Ein EPR Zustand verletzt die Bellschen Ungleichungen.

Experimente (Clauser 1969, Aspect 1982) haben Verletzung der Bellschen Ungleichungen nachgewiesen. D.h. Theorien

mit lokalen verborgenen Parametern können ad acta gelegt werden. Es existieren jedoch Theorien mit nichtlokalen verborgenen Parametern die der QTh. phänomenologisch äquivalent sind. Ein Beispiel ist die Bohmsche Mechanik.

Diese Diskussion zeigt, daß verschränkte Zustände wie $|\Psi\rangle_{\text{EPR}}$ Eigenschaften aufweisen, die in gewissem Sinne maximal von klassischen Erwartungen abweichen. Dies wird noch offensichtlicher wenn man sich 3-Parteien verschränkte Zustände ansieht.

- Das Greenberger, Horn, Zeilinger (GHZ) Gedankenexperiment (1989)

$$(8) \quad |\Psi\rangle_{\text{GHZ}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\uparrow\rangle_A |\uparrow\rangle_B |\uparrow\rangle_C - |\downarrow\rangle_A |\downarrow\rangle_B |\downarrow\rangle_C \right)$$

Führt man an einem der drei Teilchen eine Spinnmessung in eine beliebige Richtung aus ist der Spin beider anderen Teilchen in derselben Richtung instantan exakt festgelegt.

$|\Psi\rangle_{\text{GHZ}}$ ist Eigenzustand der Operatoren

$$(9) \quad \begin{matrix} \hat{\sigma}_y^A & \hat{\sigma}_y^B & \hat{\sigma}_x^C \\ \hat{\sigma}_x^A & \hat{\sigma}_x^B & \hat{\sigma}_y^C \\ \hat{\sigma}_x^A & \hat{\sigma}_y^B & \hat{\sigma}_y^C \end{matrix} \quad \text{jeweils zum Eigenwert } +1$$

und ist Eigenzustand des Operators

$$(10) \quad \hat{\sigma}_x^A \hat{\sigma}_x^B \hat{\sigma}_x^C \quad \text{zum Eigenwert } -1$$

Wenn man im Sinne verborgener Parameter annimmt, daß sowohl σ_x als auch σ_y aller Teilchen a priori festgelegt sind, würde folgen

$$(11) \quad \begin{array}{lll} S_y^A & S_y^B & S_x^C = +1 \\ S_y^A & S_x^B & S_y^C = +1 \\ S_x^A & S_y^B & S_y^C = +1 \end{array}$$

$$(12) \Rightarrow S_x^A S_x^B S_x^C = +1$$

D.h. eine Theorie verborgener Parameter würde exakt das umgekehrte Ergebnis zur Quantentheorie vorhersagen.

Verschränkung ist eine charakteristisch quantenmechanische Eigenschaft ohne klassisches Analogon

Bem: Es macht nur Sinn von Verschränkung zu reden, nachdem der Hilbertraum in Teile aufgeteilt wurde (Alice, Bob, ...)

Wichtige (maximal) verschränkte Zustände:

• 2-Parteiensysteme: Bell-Zustände (ohne Normierung):

$$(13) \quad \begin{array}{ll} |\phi_+\rangle = |00\rangle + |11\rangle & |\psi_+\rangle = |01\rangle + |10\rangle \\ |\phi_-\rangle = |00\rangle - |11\rangle & |\psi_-\rangle = |01\rangle - |10\rangle \end{array}$$

- 3-Parteiensysteme (ohne Normierung)

$$(14) \quad |GHZ\rangle = |000\rangle - |111\rangle$$

$$|W\rangle = |100\rangle + |010\rangle + |001\rangle$$

Wir werden im Laufe der Vorlesung ^{sehen und verstehen} sehen, daß Verschränkung als Hauptcharakteristika von quantenmechanischen Systemen eine zentrale Rolle in der Quanteninformationsverarbeitung spielt.

2.2. dense coding: Verschränkung als Informationsressource

Ein anschauliches Beispiel für das Potential von verschränkten Zuständen in der Informationsübertragung sei hier das von Bennett und Wiesner 1992 vorgeschlagene Verfahren der superdichten Kodierung skizziert:

Alice will einen Satz klassischer Bits an Bob senden. Wieviel qubits würde sie dafür verschicken müssen?



Nehmen wir an, Alice und Bob teilen sich ein Paar von qubits in einem Bell-Zustand

$$(15) \quad |\Phi_+\rangle = |0\rangle_A |0\rangle_B + |1\rangle_A |1\rangle_B$$

Durch lokale Operationen kann Alice $|\phi_i\rangle$ in jeden anderen Bell Zustand überführen

(16)

lokale Operation von Alice

$$\begin{aligned} |\phi_+\rangle &= |0\rangle_A |0\rangle_B + |1\rangle_A |1\rangle_B \\ |\phi_-\rangle &= |0\rangle_A |0\rangle_B - |1\rangle_A |1\rangle_B \\ |\psi_+\rangle &= |1\rangle_A |0\rangle_B + |0\rangle_A |1\rangle_B \\ |\psi_-\rangle &= |1\rangle_A |0\rangle_B - |0\rangle_A |1\rangle_B \end{aligned}$$

Damit werden 4 Möglichkeiten, d.h. 2 klassische bits kodiert. Schickt Alice ihr einzelnes qubit an Bob so kann dieser durch eine Messung an beiden qubits die vier (orthogonalen!) Bell Zustände unterscheiden.

D.h. das Übersenden eines qubits ist äquivalent zum Übersenden zweier klassischer bits, vorausgesetzt Alice und Bob besaßen anfänglich ein Paar verschränkter qubits.

$\Rightarrow$ "dense coding"

2.3. Quantenteleportation

Kann ein unbekannter Quantenzustand eines Systems in A auf ein System in B übertragen werden, ohne das Quantensystem selber zu versenden, d.h. nur mittels klassischer Kommunikation? Das no-cloning Theorem zeigt, daß dies sicher nicht ohne weiteres

möglich ist. Ein unbekannter Quantenzustand kann nicht vollständig in klassische Information umgewandelt werden. Trotzdem, wenn beide Parteien, Alice und Bob, jedoch einen maximal verschränkten Zustand zur Verfügung haben, kann ein unbekannter Zustand nur mittels LOCC Operationen von A nach B übertragen werden. Das Verfahren der Quanten-Teleportation wurde von Bennett, Brassard, Crépeau, Jozsa, Peres und Wootters (1993) vorgeschlagen (Phys. Rev. Lett. 70, 1895 (1993)).

Annahme: Alice und Bob besitzen Bell-Zustand

$$(17) \quad |\phi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_A |0\rangle_B + |1\rangle_A |1\rangle_B)$$

Zusätzlich hat Alice ein unbekannten Quantenzustand eines Spin $1/2$ Teilchens. D.h. der Gesamtzustand hat die Form

$$(18) \quad |\psi\rangle_A |\phi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha |0\rangle_A + \beta |1\rangle_A) (|0\rangle_A |0\rangle_B + |1\rangle_A |1\rangle_B)$$

Dieser läßt sich schreiben als (ohne Normierung)

$$(19) \quad \begin{aligned} |\psi\rangle_A |\phi_+\rangle &= (|0\rangle |0\rangle + |1\rangle |1\rangle)_A (\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle)_B \\ &\quad + (|0\rangle |0\rangle - |1\rangle |1\rangle)_A (\alpha |0\rangle - \beta |1\rangle)_B \\ &\quad + (|1\rangle |0\rangle + |0\rangle |1\rangle)_A (\alpha |1\rangle + \beta |0\rangle)_B \\ &\quad - (|1\rangle |0\rangle - |0\rangle |1\rangle)_A (\alpha |1\rangle - \beta |0\rangle)_B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (20) \quad |\varphi\rangle_A |\phi\rangle_{AB} &= |\phi\rangle_A (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)_B \\
 &+ |\phi\rangle_A (\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle)_B \\
 &+ |\varphi\rangle_A (\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle)_B \\
 &+ |\varphi\rangle_A (-\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle)_B
 \end{aligned}$$

Alice kann nun mittels einer Messung ihrer zwei Qubits zwischen den vier orthogonalen Bellzuständen eindeutig unterscheiden. Messung von z.B. $|\varphi\rangle_A$ kollabiert Bobs Zustand auf $\hat{\rho}_0 = |\varphi\rangle_A |\phi\rangle_{AB} \langle\phi|_A \langle\varphi|_A$

$$(21) \quad \hat{\rho}_0 \rightarrow \frac{|\varphi\rangle_A \langle\varphi|_A \hat{\rho}_0 |\varphi\rangle_A \langle\varphi|_A}{\text{Tr} \{ |\varphi\rangle_A \langle\varphi|_A \hat{\rho}_0 \}} = \alpha|1\rangle_B + \beta|0\rangle_B$$

Jetzt muß Alice Bob nur noch über einen klassischen Kanal mitteilen, daß sie " $|\varphi\rangle$ " gemessen hat. Daraufhin wendet Bob auf seinen Zustand eine Spinrotation an $|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$ und erhält ein Duplikat des Ausgangszustandes von Alice $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$. Jedem Meßausgang von Alice entspricht eindeutig eine Operation von Bob. Ohne Information von Alice ist Bobs Zustand

$$(22) \quad \hat{\rho}_B = \text{Tr}_{\text{Alice}} \{ \hat{\rho}_0 \} = \mathbb{1}$$

D.h. die klassische Information von Alice ist notwendig zur Rekonstruktion (keine Inf.-übertragung schneller als Licht). Nach der Teleportation kann Alice den Anfangszustand nicht mehr rekonstruieren (no cloning).

2.4. Kriterien und Maß der Verschränkung reiner 2-Parteienzustände

Wir hatten bereits in Abschnitt 1.1. definiert, daß ein Zustand $|\varphi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ der sich nicht in der Form

$$(23) \quad |\varphi\rangle = |\phi\rangle_A \otimes |\phi\rangle_B \quad |\phi\rangle_A \in \mathcal{H}_A, |\phi\rangle_B \in \mathcal{H}_B$$

schreiben läßt verschränkt heißt. Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Verschränkung ist, daß die (eindeutig definierte) Schmidt-Zahl S größer als 1 ist. $\square$

Liegt ein separabler Zustand der Form (12) vor, gilt

$$(24) \quad \begin{aligned} S_A &= \text{Tr}_B \{ |\varphi\rangle \langle \varphi| \} = |\phi\rangle_A \langle \phi|_A & S_A^2 &= S_A \\ S_B &= \text{Tr}_A \{ |\varphi\rangle \langle \varphi| \} = |\phi\rangle_B \langle \phi|_B & S_B^2 &= S_B \end{aligned}$$

D.h. der reduzierte Dichteoperator jedes der beiden Teilsysteme entspricht einem reinen Zustand.

$ \varphi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ separabel
$\Downarrow$
Schmidtzahl = 1
$\Uparrow$
reduzierte Dichteoperator: reiner Zustand

Nun wollen wir überlegen, wie wir Verschränkung quantifizieren

können:

Ein Bell-Zustand z.B. $|\phi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_A |0\rangle_B + |1\rangle_A |1\rangle_B)$ ist maximal verschränkt. Der Zustand $|0\rangle_A |0\rangle_B$ besitzt keine Verschränkung. Wie groß ist die Verschränkung des Zustandes

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle |0\rangle + \beta |1\rangle |1\rangle \quad ?$$

Ein vernünftiges Maß der Verschränkung ist die von-Neumann Entropie der Teilsysteme

(25)

$$E(|\psi\rangle\langle\psi|) = -\text{Tr}_B \{S_B \ln S_B\} = -\text{Tr}_A \{S_A \ln S_A\}$$

Bem: Schmidt-Zerlegung $\dim(\mathcal{H}_A) = M \leq \dim(\mathcal{H}_B) = N$

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^M c_i |i\rangle_A |i\rangle_B$$

$$S_B = \text{Tr}_A \{|\psi\rangle\langle\psi|\} = \sum_{i=1}^M c_i^2 |i\rangle_{BB} \langle i|$$

$$S_A = \text{Tr}_B \{|\psi\rangle\langle\psi|\} = \sum_{i=1}^M c_i^2 |i\rangle_{AA} \langle i|$$

$$\begin{aligned} E(|\psi\rangle\langle\psi|) &= -\text{Tr}_B \left\{ \sum_{i=1}^M c_i^2 |i\rangle_{BB} \langle i| \ln \left(\sum_{k=1}^M c_k^2 |k\rangle_{BB} \langle k| \right) \right\} \\ &= - \sum_{i=1}^M c_i^2 \ln c_i^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Man sieht, daß E folgende Eigenschaften hat:

$$(26) \quad E(|\psi\rangle\langle\psi|) \geq 0$$

$$(27) \quad E(|\varphi\rangle\langle\varphi|) = 0 \quad \text{für Schmidtzahl } s=1$$

$$(28) \quad E(|\varphi\rangle\langle\varphi|) = \max = \ln M \quad \text{falls alle Koeffizienten in Schmidtzerlegung gleich}$$

Man kann das Verschränkungsmaß E wie folgt verstehen: Liegt ein reiner Zustand in $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ vor, beschreibt die von-Neumann Entropie wieviel Information über das Teilsystem A in B steckt und umgekehrt. Ohne Verschränkung enthält das Teilsystem A keinerlei Information über das Teilsystem B .

Es gilt folgende unmittelbar evidente, aber wichtige Feststellung:

Aus einem separablen Zustand $|\varphi\rangle = |\phi\rangle_A \otimes |\phi\rangle_B$ kann mittels lokaler unitärer Operationen kein verschränkter Zustand erzeugt werden.

Der B

2.5. Verschränkung gemischter Zweiparteizustände

In 2.4. hatten wir einen reinen Zustand der Form

$$(29) \quad \rho = |\varphi\rangle\langle\varphi| = (|\phi\rangle_A |\phi\rangle_B) (\langle\phi|_A \langle\phi|_B)$$

separabel genannt. Wir wollen einen gemischten Zustand ρ auch dann noch separabel nennen wenn er eine konvexe Summe separabler Zustände

mit Wahrscheinlichkeiten p_i ist

$$(30) \quad \rho = \sum_{i=1}^k p_i (|i\rangle_A |i\rangle_B) (\langle i|_B \langle i|_A) \Leftrightarrow \text{separabel}$$

Hierbei ist $p_i \geq 0$ und $\sum_{i=1}^k p_i = 1$. Andernfalls heißt ρ verschränkt

Zustände der Form (30) können durch LOCC Operationen erzeugt werden. Sie entsprechen einem Gemisch aus verschiedenen reinen separablen Zuständen mit Gewichten p_i . Aus der Definition (30) ergibt sich:

LOCC Operationen können aus separablen Zuständen keine verschränkten Zustände generieren.

Als notwendiges Kriterium für Separabilität kann das Theorem von Peres herangezogen werden Phys. Rev. Lett. 77, 1413 (1996)

Theorem von Peres:

Phys. Rev. Lett. 77, 1413 (1996)

$$(31) \quad \text{Ist } \rho \text{ separabel folgt } \rho^{T_A} \geq 0 \text{ und } \rho^{T_B} = (\rho^{T_A})^T \geq 0$$

ρ^{T_A} bedeutet hierbei partielle Transposition bzgl. Teilsystem A

Beweis: ρ Separabel $\Rightarrow$

$$\rho = \sum_{i=1}^k p_i (|i\rangle_A |i\rangle_B) (\langle i|_B \langle i|_A)$$

$$= \sum_{i=1}^k p_i |i\rangle_{AA} \langle i| \otimes |i\rangle_{BB} \langle i|$$

dann

$$\rho^{TA} = \sum_{i=1}^k p_i (|i\rangle_{AA} \langle i|)^T \otimes |i\rangle_{BB} \langle i|$$

man ist $A^+ = (A^*)^T$ und $(|i\rangle \langle i|)^+ = |i\rangle \langle i|$

$$\Rightarrow \rho^{TA} = \sum_{i=1}^k p_i (|i^*\rangle_{AA} \langle i^*|) \otimes |i\rangle_{BB} \langle i|$$

$$= \sum_{i=1}^k p_i |i^*\rangle_A |i\rangle_B \langle i|_B \langle i^*|_A \geq 0 \quad \square$$

Falls $\rho^{TA} \geq 0$ nennt man ρ einen PPT Zustand für positive partial transpose.

M., P. und R. Horodecki haben gezeigt, daß für $\mathcal{H}_A = \mathbb{C}^2$ und $\mathcal{H}_B = \mathbb{C}^2$ sowie für $\mathcal{H}_B = \mathbb{C}^3$ Peres Kriterium notwendig und hinreichend ist
(M., P. und R. Horodecki Phys. Lett. A 232, 1 (1996))

Horodecki Theorem

in $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ bzw. $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3$ $\rho^{TA} \geq 0$

$$(32) \quad \rho \text{ separabel} \Leftrightarrow \rho^{TA} \geq 0$$

ohne Beweis

Die Frage nach einem allgemeinen Separabilitätskriterium und nach der Quantifizierung von Verschränkung gemittelt

Zustände ist bis heute ein nicht abgeschlossenes Thema der Forschung.

2.6. allgemeine Verschränkungsmaße entanglement of distillation, entanglement of formation

In 2.5. hatten wir die von Neumann Entropie als Verschränkungsmaß reiner Zweiteilchenzustände eingeführt ohne jedoch genauer begründet zu haben, warum diese eine geeignete Größe ist. Ein geeignetes quantitatives Maß für Verschränkung von Zweiteilchensystemen kann aus folgenden zwei Fragestellungen gewonnen werden:

- (1) Angenommen Alice und Bob besitzen n Kopien eines gemischten Zustandes S_{AB} . Angenommen weiterhin sie können durch LOCC Operationen aus diesen n Kopien eine gewisse Zahl $k \leq n$ von Bell Zuständen extrahieren (destillieren). Wie groß ist die maximale Anzahl $k_{\max}$ im asymptotischen Grenzfall $n \rightarrow \infty$? Die Größe

$$(33) \quad E_D(S_{AB}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_{\max}}{n}$$

nennt man entropy of distillation

- (2) Angenommen Alice und Bob haben beliebig viele Bellzustände zur Verfügung. Angenommen weiterhin sie wollen n Kopien des Zustandes S_{AB}

durch LOCC Operationen aus k' Bellzuständen erzeugen. Was ist die minimale Zahl $k'_{\min}$ die sie dazu im asymptotischen Limes $n \rightarrow \infty$ benötigen? Die Größe

$$(34) \quad E_F(S_{AB}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k'_{\min}}{n}$$

heißt man entropy of formation

Für reine Zustände gilt:

$$(35) \quad E_D(|\psi\rangle\langle\psi|) = E_F(|\psi\rangle\langle\psi|) = E(|\psi\rangle\langle\psi|)$$

wobei E die von-Neumann Entropie ist.

Für gemischte Zustände ist die von-Neumann Entropie kein vernünftiges Maß mehr, da auch separable gemischte Zustände der Form (30) verschiedene und von null verschiedene Werte für die von-Neumann Entropie ergeben. Statt der von-Neumann Entropie kann man aber die relative Entropie der Verschränkung definieren

$$(36) \quad E_R(S_{AB}) = \min_{\sigma^{\text{sep}}} \text{Tr} \{ S \ln S - S \ln \sigma \}$$

wobei das Minimum über alle separablen Zustände zu nehmen ist.

Es gilt ...

$$(37) \quad E_D \leq E_R \leq E_F$$

Bem: Alle hier definierten Maße sind unhandlich

Eine interessante Frage ist ob es Zustände ρ gibt, die nicht separabel sind aber für die trotzdem $E_D = 0$, d.h. die nicht destillierbar sind. Solche Zustände nennt man gebundene verschränkte Zustände (bound entangled), da die in ihnen vorhandene Verschränkung gewissermaßen nicht nutzbar gemacht werden kann.

Für rein zweiparteiige Zustände gibt es keine gebundene Verschränkung.

Für gemischte Zustände gilt

Horodecki Brüder (PRL 80, 5239 (1999)) + Dür et al (2000)

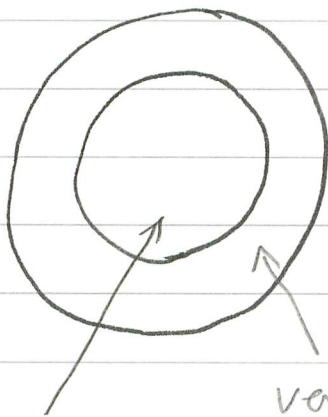
$$(38) \quad \rho^{T_A} \geq 0 \Rightarrow \rho \text{ nicht destillierbar}$$

D.h. PPT Zustände sind nicht destillierbar. Sie können aber unter Umständen verschränkt sein (nicht separabel)

Für $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ gilt auch die Umkehrung von
 (38) (Horodecki's PRL 78, 574 (1997))

(39) $\boxed{\mathcal{S} \text{ nicht destillierbar} \Rightarrow \mathcal{S}^{TA} \geq 0}$

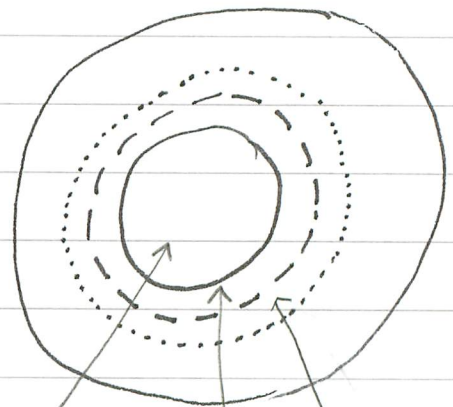
$\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$



separabel
 = PPT
 = nicht
 destillierbar

verschraenkt
 = destillierbar

allgemein



separabel PPT nicht
 destillierbar

2

Bemerkung: Hier gibt es offensichtlich noch viel
 zu tun!