
Aufgabe 23. Vertex Korrektur und $g-2$

(a) Zeigen Sie, daß gilt:

$$\overline{u}(p')\frac{(p'+p)^\mu}{2m}u(p) = \overline{u}(p')\gamma^\mu u(p) - \overline{u}(p')\frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}u(p), \tag{1}$$

wobei $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$.

(b) In der Vorlesung wurde gezeigt, daß die Vertex Korrektur für ein freies Elektron in einem äußderen, d.h. vorgegebenen, elektromagnetischen Feld zu folgender Gleichung führt

$$\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - eF_2(0)\frac{\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}}{4m} - m\right)\psi = 0. \tag{2}$$

Zeigen Sie, daß dies zur Korrektur des gyromagnetischen Faktors ($\mu_{\text{mag}} = g\frac{2}{2m}s$) gemäß

$$g - 2 = F_2(0) \tag{3}$$

führt.

Aufgabe 24.
Seien $\hat{a}$ und $\hat{a}^\dagger$ bosonische Vernichter bzw. Erzeuger. Aus dem Baker Hausdorff Theorem folgt für zwei Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ mit $[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = [\hat{B}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0$ dass

$$e^{-\alpha\hat{A}}\hat{B}e^{\alpha\hat{A}} = \hat{B} - \alpha[\hat{A}, \hat{B}]. \tag{4}$$

(a) Damit zeige man, daß gilt

$$\hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{a}\hat{D}(\alpha) = \hat{a} + \alpha \tag{5}$$

$$\hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{a}^\dagger\hat{D}(\alpha) = \hat{a}^\dagger + \alpha^*, \tag{6}$$

wobei

$$\hat{D}(\alpha) = \exp\left\{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}\right\}. \tag{7}$$

(b) Was ist der Grundzustand des anharmonischen Oszillators mit negativer Frequenz,

$$\hat{\mathcal{H}} = -\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \kappa\left(\hat{a}^\dagger\right)^2\hat{a}^2? \tag{8}$$

(c) Man finde einen geeigneten Wert α, so daß der Grundzustand von

$$\hat{\mathcal{H}}' = \hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{\mathcal{H}}\hat{D}(\alpha) \tag{9}$$

der Vakuumzustand ist.