Aufgabe 16.

Zeigen Sie dass für die Greensche Funktion der Dirac-Gleichung $S(x) = -i\langle 0|T\hat{\Psi}(x)\hat{\bar{\Psi}}(0)|0\rangle$ gilt:

$$S(k) = \frac{1}{\not{k} - m + i\epsilon} = \frac{\not{k} + m}{k_\mu k^\mu - m^2 + i\epsilon}.$$

Aufgabe 17.

Die Feldoperatoren des Diracfeldes $\hat{\Psi}(x)$ und $\hat{\bar{\Psi}}(x')$ kommutieren nicht, wenn ihr Abstand raumartig, d.h. $(x-x')_\mu\,(x-x')^\mu = (t-t')^2 - (\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2 < 0$ ist. Das ist kein Widerspruch, da die Felder an sich keine physikalischen Observablen sind. Der Operator für den Noetherstrom

$$j_\mu(x) = -e : \hat{\bar{\Psi}}(x)\gamma_\mu\hat{\Psi}(x) :$$

jedoch ist eine Observable. Zeigen Sie, dass

$$[j_\mu(x), j_\nu(x')] = 0 \quad \text{wenn} \quad (x-x')^2 < 0!$$

Aufgabe 18.

Man zeige, dass

$$\Lambda_+(\mathbf{p}) = \frac{1}{2m}\sum_s u(\mathbf{p},s)\bar{u}(\mathbf{p},s),$$
$$\Lambda_-(\mathbf{p}) = -\frac{1}{2m}\sum_s v(\mathbf{p},s)\bar{v}(\mathbf{p},s)$$

Projektoren auf positive bzw. negative Energielösungen sind, d.h. dass

$$\Lambda_\pm(p) = \frac{m \pm \not{p}}{2m}.$$

Aufgabe 19.

Es seien $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$ bosonische Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren. Zeigen Sie:

$$\begin{aligned}
\hat{a}f(\hat{n}) &= f(\hat{n}+1)\hat{a},\\
\hat{a}^\dagger f(\hat{n}) &= f(\hat{n}-1)\hat{a}^\dagger,\\
\left[\hat{a}, \hat{a}^{\dagger l}\right] &= l\hat{a}^{\dagger(l-1)} = \frac{\partial \hat{a}^{\dagger l}}{\partial \hat{a}^\dagger},\\
\left[\hat{a}^\dagger, \hat{a}^l\right] &= -l\hat{a}^{(l-1)} = -\frac{\partial \hat{a}^l}{\partial \hat{a}},\\
\left[\hat{a}, f(\hat{a}^\dagger)\right] &= \frac{\partial f(\hat{a}^\dagger)}{\partial \hat{a}^\dagger},\\
\left[\hat{a}^\dagger, f(\hat{a})\right] &= -\frac{\partial f(\hat{a})}{\partial \hat{a}}.
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der allgemeinen Beziehung für zwei Operatoren $\hat{A}$, $\hat{B}$

$$\mathrm{e}^{\xi\hat{A}} F\left(\hat{B}\right) \mathrm{e}^{-\xi\hat{A}} = F\left(\mathrm{e}^{\xi\hat{A}}\hat{B}\mathrm{e}^{-\xi\hat{A}}\right)$$

zeige man

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{x\hat{a}} f\left(\hat{a},\hat{a}^\dagger\right) \mathrm{e}^{-x\hat{a}} &= f\left(\hat{a},\hat{a}^\dagger + x\right), \\ \mathrm{e}^{-x\hat{a}^\dagger} f\left(\hat{a},\hat{a}^\dagger\right) \mathrm{e}^{x\hat{a}^\dagger} &= f\left(\hat{a}+x,\hat{a}^\dagger\right) \end{aligned}$$

und außerdem

$$\mathrm{e}^{x\hat{a}^\dagger\hat{a}} f\left(\hat{a},\hat{a}^\dagger\right) \mathrm{e}^{-x\hat{a}^\dagger\hat{a}} = f\left(\hat{a}\mathrm{e}^{-x},\hat{a}^\dagger\mathrm{e}^{x}\right).$$