
Aufgabe 12.

Unter Vernachlässigung des Spins ergibt sich aus dem Dirac Hamiltonian des relativistischen Elektron-Positron Feldes in Wechselwirkung mit dem quantisierten Strahlungsfeld in einem externen Zentralpotential $V(r)$ der nicht-relativistische Hamiltonoperator

$$\begin{aligned}
\hat{H}_0 &= \hat{H}_{elm} + \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}\ \hat{\Psi}^\dagger \left[-\frac{1}{2m}\nabla^2 + V(r) \right] \hat{\Psi}, \\
\hat{H}_I &= \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}\ \hat{\Psi}^\dagger \left[-\frac{i}{m}\nabla \cdot \hat{\mathbf{A}} + \frac{e^2}{2m}\hat{\mathbf{A}}^2 \right] \hat{\Psi}, \\
\hat{H} &= \hat{H}_0 + \hat{H}_I.
\end{aligned}$$

Hierbei ist $\hat{\Psi}$ nurmehr ein einkomponentiges Feld zu fixem Spin und positiv-Energie Lösungen der Dirac Gleichung.

Es seien $|\alpha\rangle = |a\rangle|0\rangle$ und $|\beta\rangle = |b\rangle|1_{\mathbf{k},\lambda}\rangle$ Eigenzustände von $\hat{H}_0$. In 2. Quantisierung kann man schreiben:

$$|a\rangle = \int d^3\mathbf{r}\phi_a(\mathbf{r})\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r})|0\rangle,$$

wobei $\phi_a(\mathbf{r})$ die Wellenfunktion von $|a\rangle$ bedeutet. Zeigen Sie in niedrigster Ordnung Störungstheorie, dass die Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit für die spontane Emission gegeben ist durch:

$$\Delta W_{ba} = \sum_{\{1_{\mathbf{k},\lambda}\}} \Delta W_{\beta\alpha} = \frac{\omega_{ba}^3}{3\pi}\left|\mathbf{d}_{ba}\right|^2,$$

wobei $\mathbf{d}_{ba}$ das Dipolmatrixelement des Übergangs $|b\rangle \to |a\rangle$ ist.

Aufgabe 13.

Sei $f(x)$ eine reelle Funktion, welche eine Fourierdarstellung besitzt, d.h.

$$f(x) = \int \mathrm{d}k e^{ikx}\tilde{f}(k).$$

Man zeige, dass gilt:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \frac{f(x)}{x_0 - x + i\epsilon} = -i\pi f(x_0) + \mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \frac{f(x)}{x_0 - x} \qquad (**)$$

(Hinweis: Man benutze den Cauchyschen Integralsatz für die Integration im Komplexen.) Aus (**) kann folgende Relation gefolgert werden:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{x_0 - x + i\epsilon} = -i\pi\delta(x - x_0) + \mathcal{P}\frac{1}{x_0 - x}.$$

Aufgabe 14.

Zeigen Sie, dass $S(x,x') = -i\langle 0|T\hat{\Psi}(x)\hat{\bar{\Psi}}(x')|0\rangle$ die Greensche Funktion der Dirac-Gleichung ist, d.h. das gilt:

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\, S\,(x,x') = \delta^{(4)}(x-x').$$

Aufgabe 15.

Zeigen Sie, dass für die Fouriertransformierte des Propagators des neutralen Klein-Gordon Feldes $\phi(x)$ gilt:

$$-i\int d^4x\; e^{iqx}\langle 0|T\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(0)|0\rangle = \frac{1}{q^2-m^2+i\epsilon},$$

wobei $x=(t,\mathbf{r})$ und $q=(q_0,\mathbf{q})$ bedeuten und $q^2=q_0^2-\mathbf{q}\cdot\mathbf{q}$.