Aufgabe 8. Quantisierung des elektromagnetischen Feldes

In Coulomb Eichung läßt sich der Operator des transversalen Vektorpotentials im Volumen L^3 und periodischen Randbedingungen in folgender Weise in Normalmoden zerlegen:

$$\hat{\mathbf{A}}_{\perp}(\mathbf{r},t) \;=\; \sum_n \sum_{\alpha=1}^{2} \sqrt{\frac{\hbar}{2c|k_n|L^3}} \left(\mathbf{e}_{n\alpha} \mathrm{e}^{i\mathbf{k}_n\mathbf{r}-i\omega_n t}\hat{a}_{n\alpha} + \text{h.a.}\right)$$

mit $\mathbf{k}_n = (k_{n_1}, k_{n_2}, k_{n_3})$, $k_{n_i} = \frac{2\pi n_i}{L}$, $n_i = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ und $\omega_n = c|\mathbf{k}_n|$.
Zeigen Sie, dass die Vertauschungsregeln der Normalmodenerzeuger und -vernichter

$$[\hat{a}_{n\alpha}, \hat{a}_{m\beta}] \;=\; 0 \qquad \left[\hat{a}_{n\alpha}, \hat{a}^{\dagger}_{m\beta}\right] \;=\; \delta_{nm}\delta_{\alpha\beta}$$

äquivalent zu den kanonischen Vertauschungsregeln

$$\left[\hat{A}^k_{\perp}(\mathbf{r},t), \hat{E}^l_{\perp}(\mathbf{r}',t)\right] \;=\; -i\hbar\delta^{kl}_{\perp}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$

sind. Man zeige ferner:

$$\sum_{k=1}^{2} \left[\hat{A}^k_{\perp}(\mathbf{r},t), \hat{E}^k_{\perp}(\mathbf{r}',t)\right] = -2i\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$

Aufgabe 9. Lorentz-Invarianz der Modenzerlegung skalarer Felder

Möchte man wissen, wie Lorentztransformationen auf die Modenoperatoren $\hat{a}_{\mathbf{k}}$, $\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}}$ eines skalaren Feldes $\hat{\phi}(x)$ wirken, dann kann man nicht mit der Quantisierung in einem Kasten arbeiten, da dieser nicht Lorentz-invariant ist. Man betrachtet daher $V \to \infty$ und ersetzt die diskreten Operatoren $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ durch kontinuierliche $\hat{a}(\mathbf{k})$ mittels

$$\hat{a}(\mathbf{k}) \;=\; \hat{a}_{\mathbf{k}}\sqrt{V}.$$

Die Zerlegung des Feldes in Normalmoden läßt sich dann schreiben als

$$\hat{\phi}(x) \;=\; \int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \left[\hat{a}(\mathbf{k})\mathrm{e}^{-ikx} + \hat{a}^{\dagger}(\mathbf{k})\mathrm{e}^{ikx}\right].$$

Zeigen Sie, dass diese Ersetzungen zu folgenden Kommutatorrelationen führen:

$$\left[\hat{a}(\mathbf{k}), \hat{a}^{\dagger}(\mathbf{k}')\right] \;=\; (2\pi)^3\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}').$$

Aufgabe 10. Dirac-Matrizen α_i, β

Zeigen Sie, daß die 4×4 Matrizen

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix}$$

die folgenden Eigenschaften haben:

$$\begin{aligned} &\{\alpha_i, \alpha_n\} = \alpha_i\alpha_n + \alpha_n\alpha_i = 2\delta_{in}\mathbb{1}_4 \\ &\{\alpha_i, \beta\} = \alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0 \\ &\alpha_i^2 = \beta^2 = \mathbb{1}_4 \end{aligned}$$

wobei $\mathbb{1}_d$ die d-dimensionale Einheitsmatrix und die σ_i die Paulimatrizen sind.

Aufgabe 11. (Freie Dirac Gleichung)

Bestimmen Sie die stationären Lösungen der freien Dirac Gleichung ($\hbar = c = 1$)

$$i\partial_t \Psi = \left(-i\overrightarrow{\alpha} \cdot \overrightarrow{\nabla} + m\beta\right) \Psi$$

mit dem Ansatz

$$\Psi = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \chi_0 \end{pmatrix} \exp\left(i\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{r} - iEt\right)$$