

Aufgabe 4. (Noether Theorem I)

Betrachten Sie eine Feldtheorie mit 2 Sorten Dirac Spinoren

$$\mathcal{L} = \sum_{l=1}^2 \bar{\Psi}^{(l)} \left[\frac{i}{2} \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu - m \right] \Psi^{(l)}.$$

Globale Phasentransformationen werden durch die Elemente der $SU(2)$

$$U = \exp(-ig\sigma^j\theta_j)$$

beschrieben, wobei σ^j die Pauli Matrizen bedeuten und θ_j unabhängige kontinuierliche Parameter sind.

Zeigen Sie, daß es nach dem Noether Theorem 3 erhaltene Ströme der Form

$$j_i^\mu = g \bar{\Psi} \gamma^\mu \sigma_i \Psi, \quad i \in \{1, 2, 3\}$$

gibt.

Aufgabe 5. (Noether Theorem II)

Man zeige, dass die Invarianz einer Lagrangedichte \mathcal{L} unter räumlichen und zeitlichen Translationen die Erhaltungsgleichung

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

mit

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \frac{\partial \phi}{\partial x_\nu} - g^{\mu\nu} \mathcal{L}$$

zur Folge hat. Bestimmen Sie die vier erhaltenen Noether-Ladungen

$$Q^\nu \equiv \int d^3\mathbf{x} T^{0\nu}$$

für den Spezialfall des elektromagnetischen Feldes.

Aufgabe 6. Bose-/Fermi-Vertauschungsregeln

Zeigen Sie, dass die Einteilchenoperatoren

$$\hat{\mathbf{p}} = \int d^3\mathbf{x} \, \hat{\psi}^\dagger(x) \left(-\frac{\hbar}{i} \nabla \right) \hat{\psi}(x)$$

und

$$\hat{\mathbf{x}} = \int d^3\mathbf{x} \, \hat{\psi}^\dagger(x) \mathbf{x} \hat{\psi}(x)$$

Kommutatorvertauschungsregeln

$$[\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{p}}] = i \int d^3\mathbf{x} \, \hat{\psi}^\dagger(x) \hat{\psi}(x)$$

genügen, unabhängig davon ob für $\hat{\psi}$ Bose- oder Fermi- Vertauschungsregeln gelten.

Aufgabe 7.

Betrachten Sie das quantisierte Schrödingerfeld mit 2-Teilchenwechselwirkung, d.h.

$$\hat{H} = \int d^3\vec{r} \, \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}) \left[-\frac{1}{2m} \Delta \right] \hat{\Psi}(\vec{r}) + \int d^3\vec{r} \int d^3\vec{r}' \, \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}) \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}') V(\vec{r} - \vec{r}') \hat{\Psi}(\vec{r}) \hat{\Psi}(\vec{r}')$$

Leiten Sie Bewegungsgleichungen für die Ein- und Zweiteilchenwellenfunktionen her:

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}, t) &= \langle 0 | \hat{\Psi}(\vec{r}, t) | \varphi \rangle \\ \Phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) &= \langle 0 | \hat{\Psi}(\vec{r}_1, t) \hat{\Psi}(\vec{r}_2, t) | \varphi \rangle \end{aligned}$$