
Aufgabe 1.

Die $W^{\pm}$ und Z Felder der schwachen Wechselwirkung sind massive Vektorfelder. Diese können durch die sog. Proca-Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu \tag{1}$$

beschrieben werden.

(a) Leiten Sie die Feldgleichungen für die A^μ ab.

(b) Bestimmen Sie die Energie-Impulsrelation $E = E(\mathbf{p})$ für freie Proca-Felder und begründen Sie damit die Interpretation von m als Masse.

(c) Zeigen Sie, dass (1) nicht eichinvariant ist, solange $m \neq 0$. D.h. Eichinvarianz und endliche Masse schließen sich aus.

Aufgabe 2.

Die Lagrangedichte des Schrödingerfeldes lautet

$$\mathcal{L} = -\frac{i}{2} \left(\partial_t \Psi^*\right) \Psi + \frac{i}{2} \Psi^* \left(\partial_t \Psi\right) - \frac{1}{2m} \nabla \Psi^* \nabla \Psi \tag{2}$$

(a) Zeigen Sie, dass (2) auf die Schrödingergleichung führt. Beachten Sie, dass Ψ komplexwertig ist.

(b) Berechnen Sie die verallgemeinerten Impuls(e) π.

(c) Wie lautet die Hamiltonfuktion H?

Aufgabe 3.

Jedes Vektorfeld $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ kann in einen longitudinalen $\mathbf{F}_\parallel(\mathbf{r})$ und einen transversalen Anteil $\mathbf{F}_\perp(\mathbf{r})$ zerlegt werden, wobei $\nabla \cdot \mathbf{F}_\perp = 0$ und $\nabla \times \mathbf{F}_\parallel = 0$ ist.

(a) Zeigen Sie, dass gilt

$$\mathbf{F}_\perp(\mathbf{x}) = \int \mathrm{d}^3\mathbf{y} \;\; \overset{\leftrightarrow}{\delta}_\perp (\mathbf{x} - \mathbf{y})\, \mathbf{F}(\mathbf{y}) \tag{3}$$

$$\mathbf{F}_\parallel(\mathbf{x}) = \int \mathrm{d}^3\mathbf{y} \;\; \overset{\leftrightarrow}{\delta}_\parallel (\mathbf{x} - \mathbf{y})\, \mathbf{F}(\mathbf{y}) \tag{4}$$

wobei

$$\overset{\leftrightarrow}{\delta}_{\parallel}(\mathbf{x}) = -\nabla \otimes \nabla \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} \tag{5}$$

und

$$\overset{\leftrightarrow}{\delta}_{\perp}(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}) - \overset{\leftrightarrow}{\delta}_{\parallel}(\mathbf{x}) \tag{6}$$

(b) Seien $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})$ und $\boldsymbol{\pi}(\mathbf{x})$ kanonisch konjugierte Vektorfelder. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\Big\{\boldsymbol{\phi}_{\perp}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\pi}_{\perp}(\mathbf{y})\Big\} = \overset{\leftrightarrow}{\delta}_{\perp}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \tag{7}$$