Aufgabe 15. Lorentz-Invarianz der Modenzerlegung skalarer Felder

Möchte man wissen, wie Lorentztransformationen auf die Modenoperatoren $\hat{a}_{\mathbf{k}}$, $\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger$ eines skalaren Feldes $\hat{\phi}(x)$ wirken, dann kann man nicht mit der Quantisierung in einem Kasten arbeiten, da dieser nicht Lorentz-invariant ist. Man betrachtet daher $V \to \infty$ und ersetzt die diskreten Operatoren $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ durch kontinuierliche $\hat{a}(\mathbf{k})$ mittels

$$\hat{a}(\mathbf{k}) = \hat{a}_{\mathbf{k}}\sqrt{V}.$$

Die Zerlegung des Feldes in Normalmoden läßt sich dann schreiben als

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \left[\hat{a}(\mathbf{k})\mathrm{e}^{-ikx} + \hat{a}^\dagger(\mathbf{k})\mathrm{e}^{ikx}\right].$$

Zeigen Sie, dass diese Ersetzungen zu folgenden Kommutatorrelationen führen:

$$\left[\hat{a}(\mathbf{k}), \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}')\right] = (2\pi)^3\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}').$$

Aufgabe 16.

Die Feldoperatoren des Diracfeldes $\hat{\Psi}(x)$ und $\hat{\bar{\Psi}}(x')$ kommutieren nicht, wenn ihr Abstand raumartig, d.h. $(x-x')_\mu (x-x')^\mu = (t-t')^2 - (\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2 < 0$ ist. Das ist kein Widerspruch, da die Felder an sich keine physikalischen Observablen sind. Der Operator für den Noetherstrom

$$j_\mu(x) = -e : \hat{\bar{\Psi}}(x)\gamma_\mu\hat{\Psi}(x) :$$

jedoch ist eine Observable. Zeigen Sie, dass

$$[j_\mu(x), j_\nu(x')] = 0 \quad \text{wenn} \quad (x-x')^2 < 0!$$

Aufgabe 17.

Es seien $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$ bosonische Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren. Zeigen Sie:

$$\begin{aligned}
\hat{a} f(\hat{n}) &= f(\hat{n}+1)\hat{a}, \\
\hat{a}^\dagger f(\hat{n}) &= f(\hat{n}-1)\hat{a}^\dagger, \\
\left[\hat{a}, \hat{a}^{\dagger l}\right] &= l\hat{a}^{\dagger(l-1)} = \frac{\partial \hat{a}^{\dagger l}}{\partial \hat{a}^\dagger}, \\
\left[\hat{a}^\dagger, \hat{a}^{l}\right] &= -l\hat{a}^{(l-1)} = -\frac{\partial \hat{a}^{l}}{\partial \hat{a}}, \\
\left[\hat{a}, f(\hat{a}^\dagger)\right] &= \frac{\partial f(\hat{a}^\dagger)}{\partial \hat{a}^\dagger}, \\
\left[\hat{a}^\dagger, f(\hat{a})\right] &= -\frac{\partial f(\hat{a})}{\partial \hat{a}}.
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der allgemeinen Beziehung für zwei Operatoren $\hat{A}$, $\hat{B}$

$$\mathrm{e}^{\xi\hat{A}} F\left(\hat{B}\right) \mathrm{e}^{-\xi\hat{A}} = F\left(\mathrm{e}^{\xi\hat{A}}\hat{B}\mathrm{e}^{-\xi\hat{A}}\right)$$

zeige man

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{x\hat{a}} f\left(\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right) \mathrm{e}^{-x\hat{a}} &= f\left(\hat{a}, \hat{a}^\dagger + x\right), \\
\mathrm{e}^{-x\hat{a}^\dagger} f\left(\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right) \mathrm{e}^{x\hat{a}^\dagger} &= f\left(\hat{a} + x, \hat{a}^\dagger\right)
\end{aligned}$$

und außerdem

$$\mathrm{e}^{x\hat{a}^\dagger\hat{a}} f\left(\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right) \mathrm{e}^{-x\hat{a}^\dagger\hat{a}} = f\left(\hat{a}\mathrm{e}^{-x}, \hat{a}^\dagger\mathrm{e}^{x}\right).$$