

Aufgabe 12.

Der Hamiltonoperator des relativistischen Elektron-Positron Feldes in Wechselwirkung mit dem quantisierten Strahlungsfeld in einem externen Zentralpotential $V(r)$ lautet

$$\hat{H} = \int d^3r \hat{\Psi}^\dagger \left[\boldsymbol{\alpha} \cdot \left(\frac{1}{i} \nabla - e \hat{\mathbf{A}} \right) + \beta m + V(r) \right] \hat{\Psi} + \hat{H}_{elm}.$$

Zeigen Sie, dass dieser in nicht-relativistischer Näherung übergeht in

$$\hat{H} = \int d^3r \hat{\Phi}^\dagger \left[\frac{1}{2m} \left(\frac{1}{i} \nabla - e \hat{\mathbf{A}} \right)^2 - \frac{e}{m} \hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{B}} + V(r) \right] \hat{\Phi} + \hat{H}_{elm}, \quad (*)$$

wobei $\hat{\mathbf{S}} = \frac{1}{2} \hat{\boldsymbol{\sigma}}$ der Spinoperator ist und $\hat{\Phi}$ ein 2-komponentiges Spinorfeld zu positiven Energien bezeichnet.

Aufgabe 13.

Unter Vernachlässigung des Spins ergibt sich aus (*) der nicht-relativistische Hamiltonoperator

$$\begin{aligned} \hat{H}_0 &= \hat{H}_{elm} + \int d^3r \hat{\Psi}^\dagger \left[-\frac{1}{2m} \nabla^2 + V(r) \right] \hat{\Psi}, \\ \hat{H}_I &= \int d^3r \hat{\Psi}^\dagger \left[-\frac{i}{m} \nabla \cdot \hat{\mathbf{A}} + \frac{e^2}{2m} \hat{\mathbf{A}}^2 \right] \hat{\Psi}, \\ \hat{H} &= \hat{H}_0 + \hat{H}_I. \end{aligned}$$

Es seien $|\alpha\rangle = |a\rangle|0\rangle$ und $|\beta\rangle = |b\rangle|1_{\mathbf{k},\lambda}\rangle$ Eigenzustände von \hat{H}_0 . In 2. Quantisierung kann man schreiben:

$$|a\rangle = \int d^3r \phi_a(\mathbf{r}) \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) |0\rangle,$$

wobei $\phi_a(\mathbf{r})$ die Wellenfunktion von $|a\rangle$ bedeutet. Zeigen Sie in niedrigster Ordnung Störungstheorie, dass die Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit für die spontane Emission gegeben ist durch:

$$\Delta W_{ba} = \sum_{\{1_{\mathbf{k},\lambda}\}} \Delta W_{\beta\alpha} = \frac{\omega_{ba}^3}{3\pi} |\mathbf{d}_{ba}|^2,$$

wobei \mathbf{d}_{ba} das Dipolmatrixelement des Übergangs $|b\rangle \rightarrow |a\rangle$ ist.

Aufgabe 14.

Sei $f(x)$ eine reelle Funktion, welche eine Fourierdarstellung besitzt, d.h.

$$f(x) = \int dk e^{ikx} \tilde{f}(k).$$

Man zeige, dass gilt:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{f(x)}{x_0 - x + i\epsilon} = -i\pi f(x_0) + \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{f(x)}{x_0 - x} \quad (**)$$

(Hinweis: Man benutze den Cauchyschen Integralsatz für die Integration im Komplexen.) Aus $(**)$ kann folgende Relation gefolgert werden:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x_0 - x + i\epsilon} = -i\pi \delta(x - x_0) + \mathcal{P} \frac{1}{x_0 - x}.$$