Aufgabe 8. Quantisierung des elektromagnetischen Feldes

In Coulomb Eichung läßt sich der Operator des transversalen Vektorpotentials im Volumen L^3 und periodischen Randbedingungen in folgender Weise in Normalmoden zerlegen:

$$\hat{\mathbf{A}}_\perp(\mathbf{r},t) \;=\; \sum_n \sum_{\alpha=1}^{2} \sqrt{\frac{\hbar}{2c|k_n|L^3}}\left(\mathbf{e}_{n\alpha}\mathrm{e}^{i\mathbf{k}_n\mathbf{r}-i\omega_n t}\hat{a}_{n\alpha} + \text{h.a.}\right)$$

mit $\mathbf{k}_n = (k_{n_1}, k_{n_2}, k_{n_3})$, $k_{n_i} = \frac{2\pi n_i}{L}$, $n_i = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ und $\omega_n = c|\mathbf{k}_n|$.
Zeigen Sie, dass die Vertauschungsregeln der Normalmodenerzeuger und -vernichter

$$[\hat{a}_{n\alpha}, \hat{a}_{m\beta}] \;=\; 0 \qquad \left[\hat{a}_{n\alpha}, \hat{a}^\dagger_{m\beta}\right] \;=\; \delta_{nm}\delta_{\alpha\beta}$$

äquivalent zu den kanonischen Vertauschungsregeln

$$\left[\hat{A}^k_\perp(\mathbf{r},t), \hat{E}^l_\perp(\mathbf{r}',t)\right] \;=\; -i\hbar\delta^{kl}_\perp(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$

sind. Man zeige ferner:

$$\sum_{k=1}^{2}\left[\hat{A}^k_\perp(\mathbf{r},t), \hat{E}^k_\perp(\mathbf{r}',t)\right] = -2i\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$

Aufgabe 9.

Der Hamiltonoperator und Impulsoperator des elektromagnetischen Feldes in Coulombeichung lautet

$$\hat{H} \;=\; \frac{1}{2}\int \mathrm{dV}\left(\hat{\mathbf{E}}^2_\perp + \hat{\mathbf{B}}^2_\perp\right),$$
$$\hat{\mathbf{P}} \;=\; \int \mathrm{dV}\left(\hat{\mathbf{E}}_\perp \times \hat{\mathbf{B}}_\perp\right).$$

Zeigen Sie, dass gilt

$$\hat{\mathbf{P}} \;=\; \sum_{\mathbf{k},\lambda} \mathbf{k}\hat{a}^\dagger_\lambda(\mathbf{k})\hat{a}_\lambda(\mathbf{k}),$$
$$\left[\hat{H}, \hat{a}^\dagger_\lambda(\mathbf{k})\right] \;=\; \omega_{\mathbf{k}}\hat{a}^\dagger_\lambda(\mathbf{k}),$$
$$\left[\hat{\mathbf{P}}, \hat{a}^\dagger_\lambda(\mathbf{k})\right] \;=\; \mathbf{k}\hat{a}^\dagger_\lambda(\mathbf{k}).$$

Aufgabe 10. Dirac-Matrizen α_i, β

Zeigen Sie, daß die 4×4 Matrizen

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix}$$

die folgenden Eigenschaften haben:

$$\begin{aligned} &\{\alpha_i, \alpha_n\} = \alpha_i\alpha_n + \alpha_n\alpha_i = 2\delta_{in}\mathbb{1}_4 \\ &\{\alpha_i, \beta\} = \alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0 \\ &\alpha_i^2 = \beta^2 = \mathbb{1}_4 \end{aligned}$$

wobei $\mathbb{1}_d$ die d-dimensionale Einheitsmatrix und die σ_i die Paulimatrizen sind.

Aufgabe 11. (Freie Dirac Gleichung)

Bestimmen Sie die stationären Lösungen der freien Dirac Gleichung ($\hbar = c = 1$)

$$i\partial_t\Psi = \left(-i\overrightarrow{\alpha} \cdot \overrightarrow{\nabla} + m\beta\right)\Psi$$

mit dem Ansatz

$$\Psi = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \chi_0 \end{pmatrix} \exp\left(i\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{r} - iEt\right)$$