Aufgabe 4. (Noether Theorem I)

Betrachten Sie eine Feldtheorie mit 2 Sorten Dirac Spinoren

$$\mathcal{L} = \sum_{l=1}^{2} \overline{\Psi}^{(l)} \left[\frac{i}{2} \gamma^{\mu} \overleftrightarrow{\partial}_{\mu} - m \right] \Psi^{(l)}.$$

Globale Phasentransformationen werden durch die Elemente der $SU(2)$

$$U = \exp\left(-ig\sigma^j \theta_j\right)$$

beschrieben, wobei σ^j die Pauli Matrizen bedeuten und θ_j unabhängige kontinuierliche Parameter sind.

Zeigen Sie , daß es nach dem Noether Theorem 3 erhaltene Ströme der Form

$$j_i^{\mu} = g\overline{\Psi}\gamma^{\mu}\sigma_i\Psi, \qquad i \in \{1, 2, 3\}$$

gibt.

Aufgabe 5. (Noether Theorem II)

Man zeige, dass die Invarianz einer Lagrangedichte $\mathcal{L}$ unter räumlichen und zeitlichen Translationen die Erhaltungsgleichung

$$\partial_{\mu} T^{\mu\nu} = 0$$

mit

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)} \frac{\partial \phi}{\partial x_{\nu}} - g^{\mu\nu}\mathcal{L}$$

zur Folge hat. Bestimmen Sie die vier erhaltenen Noether-Ladungen

$$Q^{\nu} \equiv \int \mathrm{d}^3\mathbf{x}\, T^{0\nu}$$

für den Spezialfall des elektromagnetischen Feldes.

Aufgabe 6. Bose-/Fermi-Vertauschungsregeln

Zeigen Sie, dass die Einteilchenoperatoren

$$\hat{\mathbf{p}} = \int \mathrm{d}^3\mathbf{x}\, \hat{\psi}^\dagger(x) \left(-\frac{\hbar}{i}\nabla\right) \hat{\psi}(x)$$

und

$$\hat{\mathbf{x}} = \int \mathrm{d}^3\mathbf{x}\, \hat{\psi}^\dagger(x)\mathbf{x}\hat{\psi}(x)$$

Kommutatorvertauschungsregeln

$$[\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{p}}] = i \int d^3\mathbf{x}\, \hat{\psi}^\dagger(x)\hat{\psi}(x)$$

genügen, unabhängig davon ob für $\hat{\psi}$ Bose- oder Fermi- Vertauschungsregeln gelten.

Aufgabe 7.

Betrachten Sie das quantisierte Schrödingerfeld mit 2-Teilchenwechselwirkung, d.h.

$$\hat{H} = \int d^3\overrightarrow{r}\,\hat{\Psi}^\dagger\left(\overrightarrow{r}\right)\left[-\frac{1}{2m}\Delta\right]\hat{\Psi}\left(\overrightarrow{r}\right) + \int d^3\overrightarrow{r} \int d^3\overrightarrow{r}'\hat{\Psi}^\dagger\left(\overrightarrow{r}\right)\hat{\Psi}^\dagger\left(\overrightarrow{r}'\right)V\left(\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r}'\right)\hat{\Psi}\left(\overrightarrow{r}\right)\hat{\Psi}\left(\overrightarrow{r}'\right)$$

Leiten Sie Bewegungsgleichungen für die Ein- und Zweiteilchenwellenfunktionen her:

$$\begin{aligned} \Phi\left(\overrightarrow{r}, t\right) &= \langle 0|\, \hat{\Psi}\left(\overrightarrow{r}, t\right) |\varphi\rangle \\ \Phi\left(\overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r_2}, t\right) &= \langle 0|\, \hat{\Psi}\left(\overrightarrow{r_1}, t\right) \hat{\Psi}\left(\overrightarrow{r_2}, t\right) |\varphi\rangle \end{aligned}$$