

**Aufgabe 1.**

Die  $W^\pm$  und  $Z$  Felder der schwachen Wechselwirkung sind massive Vektorfelder. Diese können durch die sog. Proca-Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2A_\mu A^\mu \quad (1)$$

beschrieben werden.

- (a) Leiten Sie die Feldgleichungen für die  $A^\mu$  ab.
- (b) Bestimmen Sie die Energie-Impulsrelation  $E = E(\mathbf{p})$  für freie Proca-Felder und begründen Sie damit die Interpretation von  $m$  als Masse.
- (c) Zeigen Sie, dass (1) nicht eichinvariant ist, solange  $m \neq 0$ . D.h. Eichinvarianz und endliche Masse schließen sich aus.

**Aufgabe 2.**

Die Lagrangedichte des Schrödingerfeldes lautet

$$\mathcal{L} = -\frac{i}{2}(\partial_t\Psi^*)\Psi + \frac{i}{2}\Psi^*(\partial_t\Psi) - \frac{1}{2m}\nabla\Psi^*\nabla\Psi \quad (2)$$

- (a) Zeigen Sie, dass (2) auf die Schrödingergleichung führt. Beachten Sie, dass  $\Psi$  komplexwertig ist.
- (b) Berechnen Sie die verallgemeinerten Impuls(e)  $\pi$ .
- (c) Wie lautet die Hamiltonfunktion  $H$ ?

**Aufgabe 3.**

Jedes Vektorfeld  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  kann in einen longitudinalen  $\mathbf{F}_\parallel(\mathbf{r})$  und einen transversalen Anteil  $\mathbf{F}_\perp(\mathbf{r})$  zerlegt werden, wobei  $\nabla \cdot \mathbf{F}_\perp = 0$  und  $\nabla \times \mathbf{F}_\parallel = 0$  ist.

- (a) Zeigen Sie, dass gilt

$$\mathbf{F}_\perp(\mathbf{x}) = \int d^3y \stackrel{\leftrightarrow}{\delta}_\perp(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mathbf{F}(\mathbf{y}) \quad (3)$$

$$\mathbf{F}_\parallel(\mathbf{x}) = \int d^3y \stackrel{\leftrightarrow}{\delta}_\parallel(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mathbf{F}(\mathbf{y}) \quad (4)$$

wobei

$$\overset{\leftrightarrow}{\delta}_{\parallel}(\mathbf{x}) = -\nabla \otimes \nabla \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} \quad (5)$$

und

$$\overset{\leftrightarrow}{\delta}_{\perp}(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}) - \overset{\leftrightarrow}{\delta}_{\parallel}(\mathbf{x}) \quad (6)$$

(b) Seien  $\phi(\mathbf{x})$  und  $\pi(\mathbf{x})$  kanonisch konjugierte Vektorfelder. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\left\{ \phi_{\perp}(\mathbf{x}), \pi_{\perp}(\mathbf{y}) \right\} = \overset{\leftrightarrow}{\delta}_{\perp}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (7)$$