
Aufgabe 18.

Der Hamiltonoperator des relativistischen Elektron-Positron Feldes in Wechselwirkung mit dem quantisierten Strahlungsfeld in einem externen Zentralpotential $V(r)$ lautet

$$\hat{H} = \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}\; \hat{\Psi}^\dagger \left[\boldsymbol{\alpha} \cdot \left(\frac{1}{i}\nabla - e\hat{\mathbf{A}}\right) + \beta m + V(r)\right] \hat{\Psi} + \hat{H}_{elm}.$$

Zeigen Sie, dass dieser in nicht-relativistischer Näherung übergeht in

$$\hat{H} = \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}\; \hat{\Phi}^\dagger \left[\frac{1}{2m}\left(\frac{1}{i}\nabla - e\hat{\mathbf{A}}\right)^2 - \frac{e}{m}\hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{B}} + V(r)\right] \hat{\Phi} + \hat{H}_{elm}, \tag{1}$$

wobei $\hat{\mathbf{S}} = \frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ der Spinoperator ist und $\hat{\Phi}$ ein 2-komponentiges Spinorfeld bezeichnet.

Aufgabe 19.

Unter Vernachlässigung des Spins ergibt sich aus (1) der nicht-relativistische Hamiltonoperator

$$\begin{aligned}
\hat{H}_0 &= \hat{H}_{elm} + \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}\; \hat{\Psi}^\dagger \left[-\frac{1}{2m}\nabla^2 + V(r)\right] \hat{\Psi}, \\
\hat{H}_I &= \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}\; \hat{\Psi}^\dagger \left[-\frac{i}{m}\nabla \cdot \hat{\mathbf{A}} + \frac{e^2}{2m}\hat{\mathbf{A}}^2\right] \hat{\Psi}, \\
\hat{H} &= \hat{H}_0 + \hat{H}_I.
\end{aligned}$$

Es seien $|\alpha\rangle = |a\rangle|0\rangle$ und $|\beta\rangle = |b\rangle|1_{\mathbf{k},\lambda}\rangle$ Eigenzustände von $\hat{H}_0$. Zeigen Sie in niedrigster Ordnung Störungstheorie, dass die Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit für die spontane Emission gegeben ist durch:

$$\Delta W_{ba} = \sum_{\{1_{\mathbf{k},\lambda}\}} \Delta W_{\beta\alpha} = \frac{\omega_{ba}^3}{3\pi}\left|\mathbf{d}_{ba}\right|^2,$$

wobei $\mathbf{d}_{ba}$ das Dipolmatrixelement des Übergangs $|b\rangle \to |a\rangle$ ist.

Aufgabe 20.

Sei $f(x)$ eine reelle Funktion, welche eine Fourierdarstellung besitzt, d.h.

$$f(x) = \int \mathrm{d}k e^{ikx}\tilde{f}(k).$$

Man zeige, dass gilt:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \frac{f(x)}{x_0 - x + i\epsilon} = -i\pi f(x_0) + \mathcal{P}\!\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \frac{f(x)}{x_0 - x} \tag{2}$$

(<u>Hinweis:</u> Man benutze den Cauchyschen Integralsatz für die Integration im Komplexen.) Aus (2) kann folgende Relation gefolgert werden:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{x_0 - x + i\epsilon} = -i\pi\delta(x - x_0) + \mathcal{P}\frac{1}{x_0 - x}.$$