Aufgabe 4. (Noether Theorem I)

Betrachten Sie eine Feldtheorie mit 2 Sorten Dirac Spinoren

$$\mathcal{L} = \sum_{l=1}^{2} \overline{\Psi}^{(l)} \left[\frac{i}{2} \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu - m \right] \Psi^{(l)}.$$

Globale Phasentransformationen werden durch die Elemente der $SU(2)$

$$U = \exp\left(-ig\sigma^j \theta_j\right)$$

beschrieben, wobei σ^j die Pauli Matrizen bedeuten und θ_j unabhängige kontinuierliche Parameter sind.

Zeigen Sie , daß es nach dem Noether Theorem 3 erhaltene Ströme der Form

$$j_i^\mu = g\overline{\Psi}\gamma^\mu \sigma_i \Psi, \qquad i \in \{1, 2, 3\}$$

gibt.

Aufgabe 5. (Noether Theorem II)

Man zeige, dass die Invarianz einer Lagrangedichte $\mathcal{L}$ unter räumlichen und zeitlichen Translationen die Erhaltungsgleichung

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} \; = \; 0 \tag{1}$$

mit

$$T^{\mu\nu} \; = \; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \frac{\partial \phi}{\partial x_\nu} - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \tag{2}$$

zur Folge hat. Bestimmen Sie die vier erhaltenen Noether-Ladungen

$$Q^\nu \; \equiv \; \int \mathrm{d}^3\mathbf{x} \, T^{0\nu} \tag{3}$$

für den Spezialfall des elektromagnetischen Feldes.

Aufgabe 6. (Freie Dirac Gleichung)

Bestimmen Sie die stationären Lösungen der freien Dirac Gleichung ($\hbar = c = 1$)

$$i\partial_t \Psi = \left(-i\overrightarrow{\alpha} \cdot \overrightarrow{\nabla} + m\beta\right) \Psi$$

mit dem Ansatz

$$\Psi = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \chi_0 \end{pmatrix} \exp\left(i\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{r} - iEt\right)$$

Aufgabe 7. (nichtrelativistischer Grenzfall und Dirac-Pauli Gleichung)

Betrachten Sie die Diracgleichung

$$i\partial_t \Psi = \left(-i\overrightarrow{\alpha} \cdot \overrightarrow{\nabla} + m\beta\right) \Psi$$

für den Bispinor Ψ. Zeigen Sie, daß im nichtrelativistischen Grenzfall mit dem Ansatz

$$\Psi\left(\overrightarrow{r}, t\right) = \begin{pmatrix} \varphi\left(\overrightarrow{r}, t\right) \\ \chi\left(\overrightarrow{r}, t\right) \end{pmatrix} \exp\left(-imt\right)$$

wobei ϕ und χ zweikomponentige Objekte sind, folgt

$$\chi\left(\overrightarrow{r}, t\right) \simeq \frac{\overrightarrow{\sigma} \cdot \left(-i\overrightarrow{\nabla}\right)}{2m} \varphi\left(\overrightarrow{r}, t\right).$$

d.h. $|\chi| \ll |\phi|$, und

$$i\partial_t \varphi = -\frac{\overrightarrow{\nabla}^2}{2m}\varphi.$$

Dies ist gerade die Schrödingergleichung für eine zweikomponentige Wellenfunktion (Pauli-Gleichung).