

VI. Ausblick auf Standardmodell und QCD

Ein wichtiger formaler Hilfsmittel zur Konstruktion der QED war die lokale Eichinvarianz der Diracfelder die zur minimalen Kopplung an ein Eichfeld das elm. Feld führte

$$\begin{aligned} (*) \quad \psi_\alpha(x) &\rightarrow e^{-i\theta(x)} \psi_\alpha(x) \\ \bar{\psi}_\alpha(x) &\rightarrow e^{i\theta(x)} \bar{\psi}_\alpha(x) \end{aligned}$$

$e^{i\theta(x)}$ ist Element einer U(1) Lie Gruppe. Eichinvarianz erfordert die Ersetzung

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu(x)$$

was aus der Lagrange-dichte des Dirac-Feldes

$$\mathcal{L}_D = \frac{1}{2} \bar{\psi} (i\gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu - m) \psi$$

die Kopplung an das elm. Feld liefert

$$\mathcal{L}_D \rightarrow \mathcal{L}_D - j^\mu A_\mu$$

Die Lagrange-dichte des Eichfeldes ergab sich

allgemein zu

$$\mathcal{L}_M = \lambda_1 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \lambda_2 G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} + m_g^2 A^\mu A_\mu$$

$$F_{\mu\nu} = A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu}$$

$$G_{\mu\nu} = A_{\mu,\nu} + A_{\nu,\mu}$$

Eichinvarianz ist nur der Term $\lambda_1 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$
womit die Minimalversion der Theorie fixiert ist

Zur Beschreibung der in der Natur vorkommenden
Elementarteilchen benötigen wir weitere innere
Freiheitsgrade

• Schwache Wechselwirkung:

Isospin

Fermionen dublett

• Starke Wechselwirkung:

Farbe

Fermionentriplett

Für die Dubletts bzw. Triplets von Fermionen wollen
wir wiederum eine lokale Eichinvarianz fordern.
In Verallgemeinerung von (*) fordern wir
Invarianz unter

Schwache WW:

$$\begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \psi'_1(x) \\ \psi'_2(x) \end{pmatrix} = \underline{U}(x) \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix}$$

wobei ψ_1 und ψ_2 jeweils Dirac-Bispinoren sind
da es sich um Fermionen handelt

$$\underline{U}(x) = e^{-i \frac{1}{2} G_i \theta_i(x)}$$

G_1, G_2, G_3 Pauli-Matrizen, $\theta_i(x)$ sind reelle
Funktionen

$$G_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad G_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad G_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Die Matrizen $\underline{U}(x)$ sind Elemente der SU(2)

starke WW:

$$\begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \psi'_1(x) \\ \psi'_2(x) \\ \psi'_3(x) \end{pmatrix} = \underline{U}(x) \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \end{pmatrix}$$

hier ist

$$\underline{U}(x) = e^{-i \frac{1}{2} \lambda_i \theta_i(x)}$$

Die λ_i mit $i=1, \dots, 8$ sind die 8 Gell-Mann
Matrizen

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Die Matrizen $\underline{U}$ (x) bilden eine Gruppe die $SU(3)$

Einschub:

zu Lie-Gruppen

Lie Gruppe

kontinuierliche Gruppe aus Elementen $\underline{G}$ bzgl.
Hintereinanderausführung der
stetig aus der $\mathbb{I}$ hervorgehen
und von einem Satz reeller
kontinuierlicher Parameter in
 $a, b, c, \dots$ abhängt

Generatoren

$$\underline{\underline{L}}_a = \left. \frac{\partial \underline{\underline{G}}(a, b, c, \dots)}{\partial a} \right|_{a, b, c, \dots = 0}$$

$SU(N)$

spezielle unitäre Matrizen $\underline{U}$
in N Dimensionen

$$\det(\underline{U}) = 1$$

$\exists (N^2 - 1)$ Generatoren $\underline{L}_i$

$SU(2)$: 3 Generatoren

Pauli - Matrizen

$SU(3)$: 8 Generatoren

Gell-Mann Matrizen

$$\underline{U} = e^{-\frac{i}{2} \underline{\vec{L}} \cdot \underline{\vec{\Theta}}}$$

Lie Algebra

Die Generatoren genügen einer Lie Algebra

$$[\underline{L}_k, \underline{L}_l] = i f^{klm} \underline{L}_m$$

da Hintereinanderausführung zweier Elemente der Gruppe wieder ein Element der Gruppe sein muß.

Die f^{klm} heißen Strukturkonstanten.

$SU(2)$

$$f^{klm} = \epsilon^{klm}$$

Damit eine fermionische (Dirac) Lagrange-dichte unter $SU(2)$ bzw. $SU(3)$ lokaler Eichtransformation invariant ist muß wieder die gewöhnliche Ableitung durch die kovariante Ableitung ersetzt werden:

$$\underline{\psi} \equiv \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix} \text{ bzw. } \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\partial}_\mu \underline{\psi} &\rightarrow \overrightarrow{D}_\mu \underline{\psi} = \left(\overrightarrow{\partial}_\mu + i g \underline{A}_\mu(x) \right) \underline{\psi} \\ \overleftarrow{\psi} \overleftarrow{\partial}_\mu &\rightarrow \overleftarrow{\psi} \overleftarrow{D}_\mu = \overleftarrow{\psi} \left(\overleftarrow{\partial}_\mu - i g \underline{A}_\mu(x) \right) \end{aligned}$$

wobei im Falle der $SU(N)$, $\underline{A}_\mu(x)$ eine $N \times N$ Matrix ist

$$\underline{A}_\mu(x) = \frac{1}{2} \underline{T}_i A_\mu^i(x)$$

$\Rightarrow$ je Generator existiert ein Eichfeld $A^i(x)$

Forderung nach lokaler Eichinvarianz führt zu

$$\mathcal{L}_D = \frac{1}{2} \overleftarrow{\psi} \left(i \gamma^\mu \overrightarrow{\partial}_\mu - m \right) \underline{\psi}$$

$\downarrow$

$$\mathcal{L}_D = g \overleftarrow{\psi} \gamma^\mu \underline{A}_\mu \underline{\psi}$$

Matrix im
Dirac-Bispinorraum

$N \times N$ Matrix
im Isospinraum!

Das legt den WW Lagrangian fest zu

$$\mathcal{L}_{WW} = -g \overleftarrow{\psi} \gamma^\mu \underline{A}_\mu \underline{\psi} = -j_e^\mu A_\mu^e$$

Jetzt gibt es 2 Isospinströme eines je Eichfeld A^e .

$$\bar{j}_e = g \bar{\psi} \gamma^\mu \frac{1}{2} \underline{\underline{L}}_e \psi$$

Bei der Konstruktion des freien Lagrangians der Eichfelder verallgemeinert man die Definition des Feldstärke tensors

$$\underline{\underline{F}}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \underline{\underline{L}}_e F_{\mu\nu}^e$$

wobei man für jedes Eichfeld A^e setzen könnte

$$F_{\mu\nu}^e = A_{\mu,\nu}^e - A_{\nu,\mu}^e \quad ?$$

bzw

$$(*) \quad \underline{\underline{F}}_{\mu\nu} = \partial_\nu \underline{\underline{A}}_\mu - \partial_\mu \underline{\underline{A}}_\nu \quad ?$$

Im Falle nicht-Abelscher Eichgruppen sind die so definierten Feldstärke tensors aber nicht mehr eichinvariant!

Eichinvarianz ist gegeben, wenn in (*) die Ableitung durch eine kovariante Ableitung ersetzt wird

$$\underline{\underline{F}}_{\mu\nu} = \underline{\underline{D}}_\nu \underline{\underline{A}}_\mu - \underline{\underline{D}}_\mu \underline{\underline{A}}_\nu$$

was ausgeschrieben bedeutet

$$\underline{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \underline{A}_\nu - \partial_\nu \underline{A}_\mu + ig [\underline{A}_\mu, \underline{A}_\nu]$$

nichtlinear (!) Beitrag zum
Feldstärke tensor für nicht-abelsche
Eichfelder

Wegen des nichtlinearen Terms in $\underline{F}_{\mu\nu}$ ist nun
die Theorie der freien Eichfelder eine nichtlineare
Theorie

$$\mathcal{L}_F = -\frac{1}{2} \text{Tr} \{ \underline{F}_{\mu\nu} \underline{F}^{\mu\nu} \}$$

wobei sich die Spur auf die Isospinindizes bezieht.

Die komplette Lagrangedichte einer $SU(N)$
lokal eichinvarianten Theorie, auch Yang-
Mills Theorie genannt ist damit

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x) \left[\frac{i}{2} \gamma^\mu \underline{D}_\mu - m \right] \psi(x) - \frac{1}{2} \text{Tr} \{ \underline{F}_{\mu\nu} \underline{F}^{\mu\nu} \}$$

Es entstehen dabei verschiedene Wechselwirkungsterme

1.1.1.1

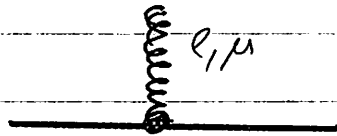
ffg - Kopplung

$SU(N)$ jeder Fermion (f) hat N Freiheitsgrade und koppelt an $N^2 - 1$ Eichbosonen (g)

$$\mathcal{L}_{ffg} = -g \bar{\psi} \gamma^\mu \frac{1}{2} \underline{L} e \psi A_\mu^e$$

Vertex

$$-ig \gamma^\mu \frac{1}{2} \underline{L} e$$



e^i für Eichfeld
Polarisation μ

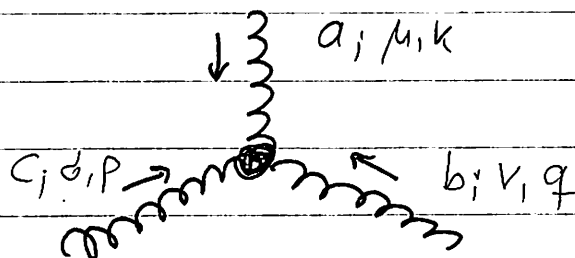
Die im Lagrangian des freien Feldes

$$\mathcal{L}_F = -\frac{1}{2} \partial^\mu A^{e\nu} (\partial_\mu A_\nu^e - \partial_\nu A_\mu^e) + \mathcal{L}_{3g} + \mathcal{L}_{4g}$$

enthaltenen Wechselwirkungen $\mathcal{L}_{3g}$ und $\mathcal{L}_{4g}$ sind

3g - Kopplung

$$\mathcal{L}_{3g} = \frac{1}{2} g f_{abc} A^{b\mu} A^{c\nu} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)$$



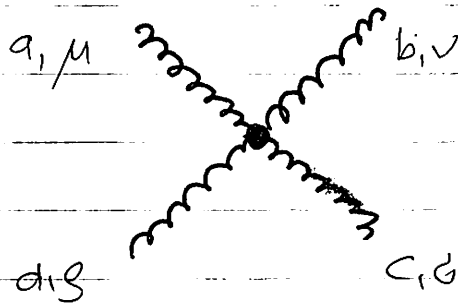
a, b, c - Eichfeld
 μ, ν, ρ - Polarisation
 k, p, q - 4-Impuls

Vertex

$$g f_{abc} \{ g_{\mu\nu} (q_\sigma - k_\sigma) + g_{\nu\sigma} (p_\mu - q_\mu) + g_{\sigma\mu} (k_\nu - p_\nu) \}$$

4g-Kopplung

$$L_{4g} = -\frac{1}{4} g^2 f_{abc} f_{cde} A_\mu^a A_\mu^b A^\mu_c A^\mu_d$$



Vertex

$$\begin{aligned} & -ig^2 \{ f_{abc} f_{cde} (g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma}) \\ & + f_{ace} f_{bde} (g_{\mu\nu} g_{\sigma\rho} - g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma}) \\ & + f_{ade} f_{cbe} (g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho} - g_{\mu\nu} g_{\sigma\rho}) \} \end{aligned}$$

Bem! Eichinvarianz erfordert daß in L_{4g} , L_{3g} und L_{2g} dieselbe Kopplungskonstante g auftritt